

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

A.M. УЛАНОВ

**ВИБРАЦИЯ И ПРОЧНОСТЬ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ
И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

С А М А Р А 2 0 1 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

A.M. УЛАНОВ

ВИБРАЦИЯ И ПРОЧНОСТЬ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ
И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2011

УДК СГАУ: 621.452.3.539.4(075)

ББК СГАУ: 39.55

У

Рецензенты:

Уланов А.М.

У **Вибрация и прочность авиационных двигателей и энергетических установок:** учеб. пособие / A. M. Уланов. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 60 с.: ил.

ISBN

Рассмотрены колебания лопаток и дисков газотурбинных двигателей, колебания рабочих колес и построение резонансных диаграмм, защита от вибрации и удара.

Лекции предназначены для студентов двигателестроительных факультетов, обучающихся по специальности "Авиационные двигатели и энергетические установки".

УДК СГАУ: 621.452.3.539.4(075)

ББК СГАУ: 39.55

ISBN

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2011

УДК 621.452.3.539.4(075)

ББК 39.55

СОДЕРЖАНИЕ

1. Колебания лопаток.....	5
1.1. Изгибные колебания. Получение системы дифференциальных уравнений.....	5
1.2. Колебания консольно закрепленной лопатки.....	11
1.3. Влияние податливости консольного закрепления	
на собственные частоты колебаний лопатки.....	12
1.4. Крутильные колебания лопаток.....	13
1.5. Классификация форм колебаний лопаток.....	16
1.6. Влияние различных факторов на собственные частоты колебаний лопаток.....	17
2. Колебания диска рабочего колеса.....	20
3. Вынужденные колебания рабочих колес ГТД.....	30
3.1. Понятие о возбуждающих гармониках.....	30
3.2. Резонансная диаграмма.....	31
3.3. Автоколебания.....	32
3.4. Борьба с опасными колебаниями рабочих колес.....	34
4. Защита от вибрации	40
4.1. Необходимые данные для проектирования виброзащитной системы.....	40
4.2. Расчет характеристик виброзащитной системы.....	41
4.3. Оптимальное размещение виброизоляторов.....	44
4.4. Конструкции виброизоляторов для агрегатов ГТД	47
4.5. Защита от случайной вибрации	50
5. Защита от удара.....	52

1. КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

1.1. Изгибные колебания. Получение системы дифференциальных уравнений

Допущения:

- лопатку рассматриваем как закрученный стержень переменного сечения;
- отсутствует связь изгибных и крутильных колебаний;
- ось лопатки проходит через центры тяжести всех сечений и нерастяжима;
- при колебаниях все сечения остаются плоскими и перпендикулярными упругой линии (гипотеза Кирхгофа – Лява).

Примем систему координат $OXYZ$, начало которой O расположено в центре тяжести корневого сечения, оси X и Y совпадают с главными центральными осями инерции корневого сечения (пусть $J_y \ll J_x$), ось Z направлена по оси лопатки. Оси вспомогательной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ параллельны осям главной системы координат, начало O_1 находится в центре тяжести текущего сечения. Выделим в лопатке бесконечно малый элемент высотой dz (рис. 1.1).

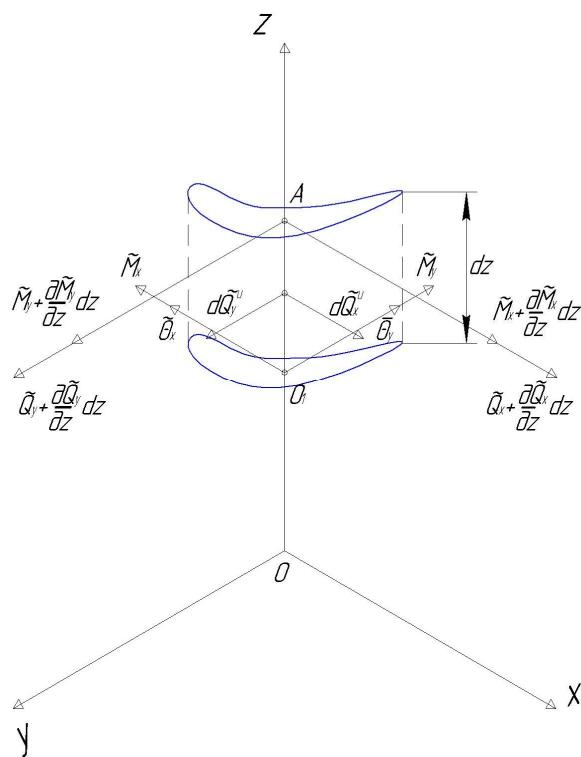


Рис.1.1. Бесконечно малый элемент лопатки и динамические силы, приложенные к нему при изгибных колебаниях

Рассмотрим условия равновесия элемента с учетом сил инерции

$$\partial \tilde{Q}_x^u = -m \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} = -F dz \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \text{ и}$$

$$\partial \tilde{Q}_y^u = -m \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2} = -F dz \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2},$$

где \tilde{q}_x и \tilde{q}_y - упругие смещения в направлении осей X и Y . Знак волны над переменной означает то, что она зависит от времени.

В направлении оси X_1

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_x + \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial t} dz - \tilde{Q}_x - Fdz\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} = 0, \text{ откуда} \\ \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial z} = Fdz\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из условия равновесия в направлении оси Y_1 аналогично получаем

$$\frac{\partial \tilde{Q}_y}{\partial z} = Fdz\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Вокруг оси X_1 :

$$\tilde{M}_x + \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} dz - \tilde{M}_x + \tilde{Q}_y dz + \frac{\partial \tilde{Q}_y}{\partial z} dz dz + d\tilde{Q}_y^u \frac{dz}{2} = 0.$$

Приводя подобные и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получаем

$$\frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} = -\tilde{Q}_y. \quad (1.3)$$

Вокруг оси Y_1 :

$$\tilde{M}_y + \frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial z} dz - \tilde{M}_y - \tilde{Q}_x dz - \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial z} dz dz - d\tilde{Q}_x^u \frac{dz}{2} = 0.$$

Приводя подобные и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получаем

$$\frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial z} = \tilde{Q}_x. \quad (1.4)$$

Установим связь моментов и углов поворота сечений. В плоскости Oxz (рис. 1.2)

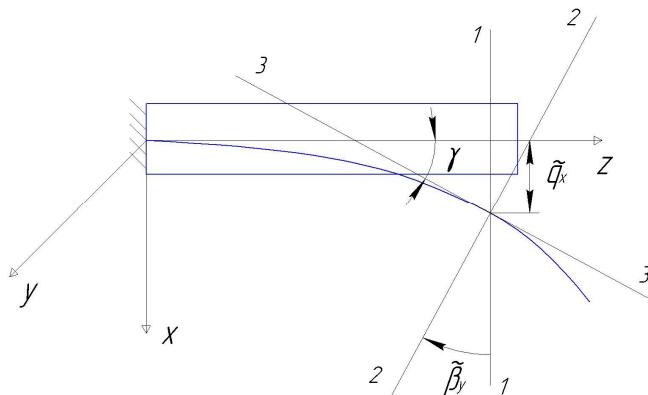


Рис.1.2. Изгиб оси лопатки в плоскости Oxz

1 – положение сечения в равновесном состоянии; 2 - положение изогнутой оси лопатки;
3 - касательная к изогнутой оси лопатки в месте расположения сечения.

Из рис. 2.2 видно, что

$$tg \gamma = \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial z} \approx \gamma$$

С учетом знаков момента и угла поворота

$$\tilde{\beta}_y = -\gamma = -\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial z} \quad (1.5)$$

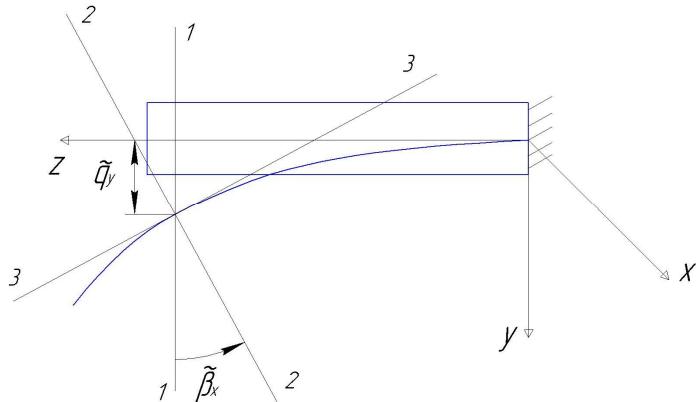


Рис.1.3. Изгиб оси лопатки в плоскости OYZ

1 – положение сечения в равновесном состоянии; 2 - положение изогнутой оси лопатки;
3 - касательная к изогнутой оси лопатки в месте расположения сечения.

В другой плоскости из рис. 3.3 видно

$$\tilde{\beta}_x = \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial z} \quad (1.6)$$

Сечение лопатки поворачивается вокруг осей X и Y . Из рис. 1.4 видно, что (с учетом знаков углов поворота) перемещение произвольной точки сечения $A(X_1, Y_1)$ в направлении оси Z вследствие поворота сечения вокруг оси X составляет

$$\tilde{\delta}_1 = -Y_1 \tilde{\beta}_x ,$$

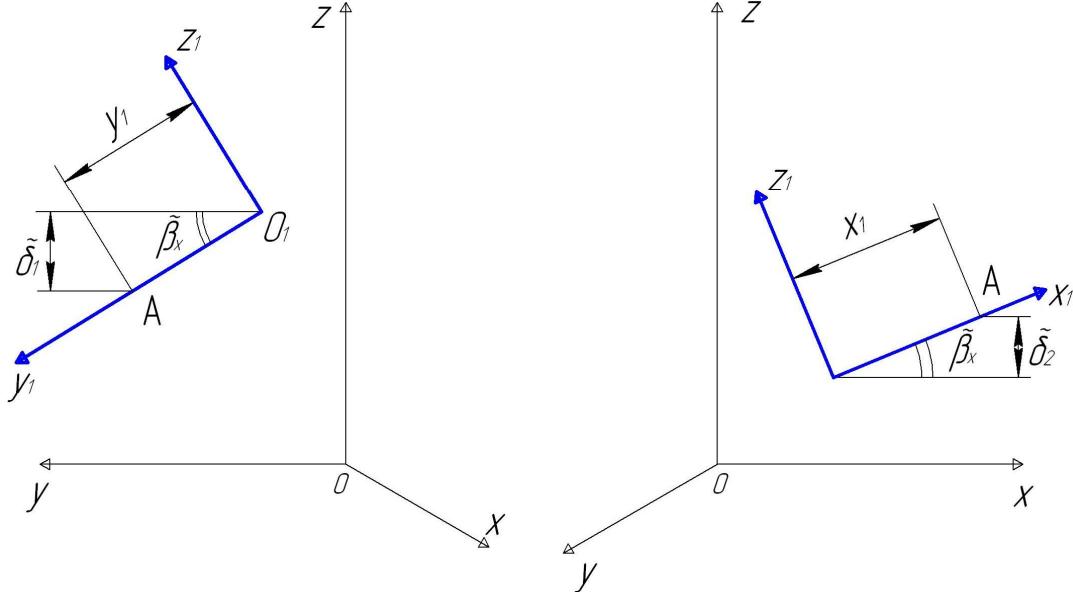


Рис.1.4. Поворот сечения лопатки в плоскостях OXZ и OYZ

вследствие поворота сечения вокруг оси Y составляет

$$\tilde{\delta}_2 = X_1 \tilde{\beta}_y .$$

Есть также перемещение \tilde{q}_z в направлении оси Z сечения в целом, связанное с перемещением его центра, точки O_1 . Полное перемещение точки $A(X_1, Y_1)$ в направлении оси Z

$$\tilde{W} = \tilde{q}_z + \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2 .$$

Согласно формулам Коши

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} - Y_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} + X_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z}.$$

Тогда напряжение в окрестности точки $A(X_1, Y_1)$

$$\tilde{\sigma}_z = E \tilde{\varepsilon}_z = E \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} - EY_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} + EX_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z}.$$

Это напряжение создает бесконечно малые моменты вокруг осей (рис. 1.5)

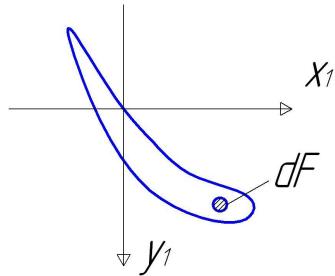


Рис. 1.5. Определение знаков моментов сил от напряжения на бесконечно малой площади dF

$$d\tilde{M}_{x_1} = -dF \tilde{\sigma}_z Y_1 ,$$

$$d\tilde{M}_{y_1} = dF \tilde{\sigma}_z X_1 .$$

Полный момент

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{x_1} &= - \int_F E \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} Y_1 dF - \int_F EY_1^2 \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} dF + \int_F EY_1 X_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} dF = \\ &= -E \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} \underbrace{\int_F Y_1 dF}_{S_x} + E \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} \underbrace{\int_F Y_1^2 dF}_{J_x} - E \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} \underbrace{\int_F Y_1 X_1 dF}_{J_{xy}} \end{aligned}$$

В первое слагаемое входит статический момент вокруг оси X_1 . Поскольку X_1 – главная ось инерции, этот момент равен нулю. Во второе слагаемое входит момент инерции относительно оси X_1 , в третье – центробежный момент инерции. Таким образом,

$$\tilde{M}_{x_1} = E \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} J_{x_1} - E \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} J_{x_1 y_1}$$

Аналогично:

$$\tilde{M}_{y_1} = -E \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} J_{y_1 x_1} + E \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} J_{y_1}$$

Поскольку деформации лопатки при колебаниях малы, будем считать, что оси главной и вспомогательной систем координат приблизительно параллельны. Тогда

$\tilde{M}_{x_1} \approx \tilde{M}_x ; \tilde{M}_{y_1} \approx \tilde{M}_y$, моменты инерции тоже приблизительно одинаковы.

Запишем два последних уравнения в матричной форме.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EJ_x & -EJ_{xy} \\ -EJ_{xy} & EJ_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} \end{Bmatrix} .$$

Обозначив матрицу как $[A]$, получим

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{Bmatrix} .$$

Пусть матрица $[A]^{-1}$ имеет вид $\begin{bmatrix} a_x & a_{xy} \\ a_{xy} & a_y \end{bmatrix}$. Тогда

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} = a_x \tilde{M}_x + a_{xy} \tilde{M}_y \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} = a_{xy} \tilde{M}_x + a_y \tilde{M}_y \quad (1.8)$$

Уравнения (2.1)...(2.8) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающих изгибные колебания лопатки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial z} = -\tilde{\beta}_y \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} = a_{xy} \tilde{M}_x + a_y \tilde{M}_y \\ \frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial z} = \tilde{Q}_x \\ \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial z} = F\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial z} = \tilde{\beta}_x \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} = a_x \tilde{M}_x + a_{xy} \tilde{M}_y \\ \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} = -\tilde{Q}_y \\ \frac{\partial \tilde{Q}_y}{\partial z} = F\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

Параметры в первых четырех уравнениях, а именно: q_x ; β_y ; M_y ; Q_x имеют отношение к плоскости OXZ , поэтому первые четыре уравнения описывают колебания в плоскости OXZ , а последние четыре – определяют колебания в плоскости OYZ . Связь между колебаниями в этих плоскостях осуществляется через коэффициент a_{xy} при M_x и M_y . Если лопатка не слишком закрученная, то оси X_1 и Y_1 приблизительно совпадают с главными осями инерции во всех сечениях, в таком случае центробежные моменты

инерции близки к нулю, коэффициент $a_{xy} = 0$ и связь между колебаниями в плоскостях OXZ и OYZ отсутствует. В этом случае

$$a_y = \frac{1}{EJ_y}; \quad a_x = \frac{1}{EJ_x}.$$

Рассмотрим колебания в плоскости OXZ , т. е. только первые четыре уравнения. Их решение будем искать в гармоническом виде (где p – собственная частота колебаний):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_x = q_x \cos pt \\ \tilde{\beta}_y = \beta_y \cos pt \\ \tilde{M}_y = M_y \cos pt \\ \tilde{Q}_x = Q_x \cos pt \end{array} \right.$$

После подстановки в дифференциальные уравнения получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_x}{\partial z} \cos pt = -\beta_y \cos pt \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial z} \cos pt = \frac{1}{EJ_y} M_y \cos pt \\ \frac{\partial M_y}{\partial z} \cos pt = Q_x \cos pt \\ \frac{\partial Q_x}{\partial z} \cos pt = -F\rho p^2 q_x \cos pt \end{array} \right.$$

Из первого уравнения $\beta_y = -\frac{\partial q_x}{\partial z}$. Подставим это во второе уравнение, получим

$M_y = -EJ_y \frac{\partial^2 q_x}{\partial z^2}$. Подставив в третье уравнение, получим $Q_x = -EJ_y \frac{\partial^3 q_x}{\partial z^3}$. Подставив в

четвертое уравнение, получим $-EJ_y \frac{\partial^4 q_x}{\partial z^4} = -F\rho p^2 q_x$. Окончательно получили

дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 q_x}{\partial z^4} - \frac{F\rho p^2}{EJ_y} q_x = 0.$$

Обозначим

$$\alpha^4 = \frac{F\rho p^2}{EJ_y}. \quad \text{Тогда}$$

$$p = \alpha^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{F\rho}},$$

$$\frac{\partial^4 q_x}{\partial z^4} - \alpha^4 q_x = 0.$$

Решение уравнения четвертого порядка – сумма четырех линейно независимых частных решений.

$$q_x = C_1 q_{x1} + C_2 q_{x2} + C_3 q_{x3} + C_4 q_{x4}$$

Частными решениями уравнения являются $\sin \alpha z$, $\cos \alpha z$, а также гиперболические косинус и синус

$$ch \alpha z = \frac{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}{2}$$

$$sh \alpha z = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{2}$$

$$ch(0) = 1$$

$$sh(0) = 0$$

В решение будем подставлять их суммы, которые называются функциями Крылова.

$$S(\alpha z) = \frac{1}{2}(ch \alpha z + \cos \alpha z) ,$$

$$T(\alpha z) = \frac{1}{2}(sh \alpha z + \sin \alpha z) ,$$

$$U(\alpha z) = \frac{1}{2}(ch \alpha z - \cos \alpha z) ,$$

$$V(\alpha z) = \frac{1}{2}(sh \alpha z - \sin \alpha z) .$$

Преимущество этих функций состоит в том, что при дифференцировании они переходят друг в друга: $dS/dz = V$; $dT/dz = S$; $dU/dz = T$; $dV/dz = U$.

При этом $S(0)=1$; $T(0) = U(0) = V(0) = 0$.

Подставим решение вида $q_x(\alpha z) = C_1 S(\alpha z) + C_2 T(\alpha z) + C_3 U(\alpha z) + C_4 V(\alpha z)$ в полученные уравнения.

$$\beta_y(\alpha z) = -\alpha(C_1 V(\alpha z) + C_2 S(\alpha z) + C_3 T(\alpha z) + C_4 U(\alpha z)) ,$$

$$M_y(\alpha z) = -\alpha^2 E J_y(C_1 U(\alpha z) + C_2 V(\alpha z) + C_3 S(\alpha z) + C_4 T(\alpha z)) ,$$

$$Q_x(\alpha z) = -\alpha^3 E J_y(C_1 T(\alpha z) + C_2 U(\alpha z) + C_3 V(\alpha z) + C_4 S(\alpha z)) .$$

Неизвестные постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 определяются из граничных условий.

1.2. Колебания консольно закрепленной лопатки

Система имеет по две степени свободы (перемещение и угол поворота) на каждой из границ, соответственно, необходимы по 2 граничных условия на каждую границу.

При $z=0$ при консольном абсолютно жестком закреплении $q_x=0$; $\beta_y=0$.

$$q_x = 0 = C_1 S(0) + C_2 T(0) + C_3 U(0) + C_4 V(0) ;$$

$$0 = C_1 * 1 + C_2 * 0 + C_3 * 0 + C_4 * 0 ;$$

откуда следует

$$C_1 = 0.$$

Также

$$\beta_y = 0 = -\alpha(C_1 V(0) + C_2 S(0) + C_3 T(0) + C_4 U(0)$$

$$0 = C_1 * 0 + C_2 * 1 + C_3 * 0 + C_4 * 0 ,$$

откуда следует

$$C_2 = 0.$$

При $z=l$ на свободном краю лопатки $M_y(l)=0$; $Q_x(l)=0$. Подставив в решение, получим

$$M_y(l) = -\alpha^2 EJ_y(C_3S(\alpha l) + C_4T(\alpha l)) = 0$$

$$Q_x(l) = -\alpha^3 EJ_y(C_3V(\alpha l) + C_4S(\alpha l)) = 0 .$$

Или

$$C_3S(\alpha l) + C_4T(\alpha l) = 0$$

$$C_3V(\alpha l) + C_4S(\alpha l) = 0 .$$

Эта однородная система уравнений имеет решения, если ее определитель равен нулю.

$$T(\alpha l)V(\alpha l) - S^2(\alpha l) = 0$$

Это имеет место при $\alpha l = K_i$, где

$$K_1=1,875 ,$$

$$K_2=4,69 ,$$

$$K_3=7,8$$

и т.д.

Поскольку $\alpha_i=K_i/l$,

$$p_i = \left(\frac{K_i}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}} .$$

Это уравнение определяет бесконечное количество собственных частот колебаний, каждой из которых соответствует своя форма колебания (форма колебания – это распределение относительных перемещений по колеблющемуся телу). Первая, вторая и третья формы изгибных колебаний приведены на рис. 1.6.

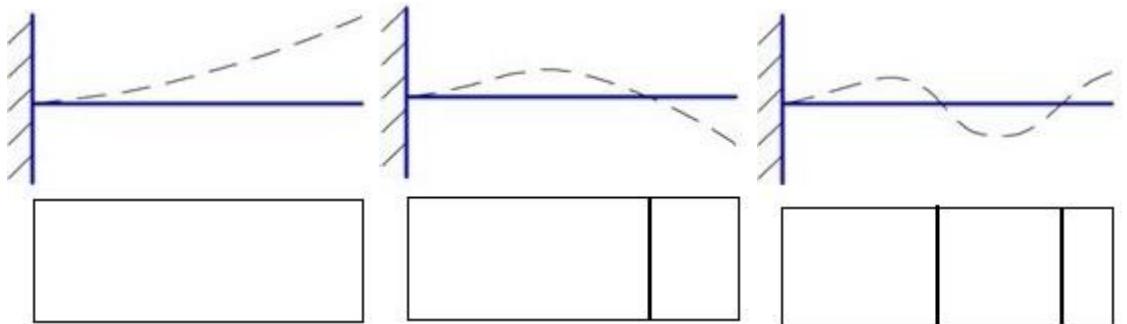


Рис.1.6. Первая, вторая и третья формы изгибных колебаний

1.3. Влияние податливости консольного закрепления на собственные частоты колебаний лопатки

Рассмотрим случай, когда закрепление исключает линейные перемещения, но податливо с жесткостью C_m для угловых перемещений.

На краю $z=0$ имеет место $q_x=0$, откуда $C_I=0$.

Закрепление создает момент $M_3 = -C_m\beta_y$.

Поскольку $M_y(0) + M_3 = 0$,

$$-\alpha^2 EJ_y(C_2V(0) + C_3S(0) + C_4T(0)) + C_m\alpha(C_2S(0) + C_3T(0) + C_4U(0)) = 0 ,$$

получаем

$$\frac{C_m}{EJ_y} C_2 - \alpha C_3 = 0.$$

При $z=l$ на свободном краю лопатки $M_y(l)=0; Q_x(l)=0$. Подставив в решение, получим

$$-\alpha^2 EJ_y (C_3 S(\alpha l) + C_4 T(\alpha l)) = 0$$

$$-\alpha^3 EJ_y (C_3 V(\alpha l) + C_4 S(\alpha l)) = 0.$$

Объединив эти уравнения с предыдущим, получим систему из трех уравнений для определения $C_2; C_3; C_4$.

Если $C_m=0$ (это соответствует шарнирному замку лопатки), то частота первой изгибной формы равна нулю, то есть первая изгибная форма колебаний отсутствует. В этом состоит преимущество применения шарнирного замка (который, однако, имеет больший вес). Остальные формы изгибных колебаний сохраняются, но частоты их уменьшаются (рис. 1.7).

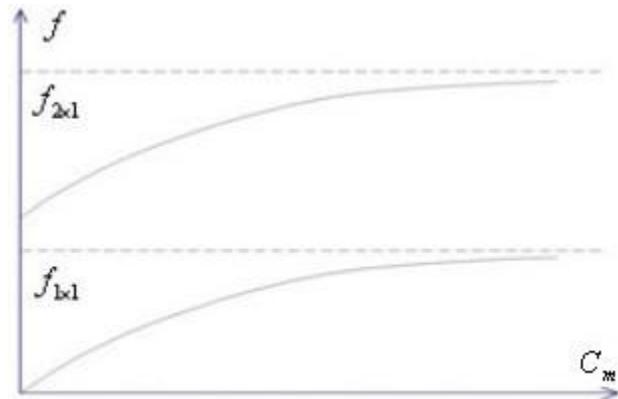


Рис. 1.7. Влияние податливости консольного закрепления на собственные частоты колебаний лопатки

1.4. Крутильные колебания лопаток

Лопатку будем рассматривать как стержень постоянного сечения. Допустим, что центр тяжести и центр жесткости во всех сечениях лопатки совпадают, и кручение не зависит от изгиба.

Крутящий момент вокруг оси z

$$\tilde{M}_z = GJ_K \frac{\partial \tilde{\beta}_z}{\partial z},$$

откуда $\frac{\partial \tilde{\beta}_z}{\partial z} = \frac{1}{GJ_K} \tilde{M}_z,$ (1.9)

где G – модуль сдвига, а момент инерции на кручение

$$J_K \approx \frac{1}{3} \int_0^b (f_2(x) - f_1(x))^3 dx,$$

где b – длина хорды лопатки, функция $f_1(x)$ описывает корытце лопатки, а $f_2(x)$ – спинку (рис. 1.8). Если сечение близко к круглому, $J_K \approx J_\rho$ – полярному моменту инерции.

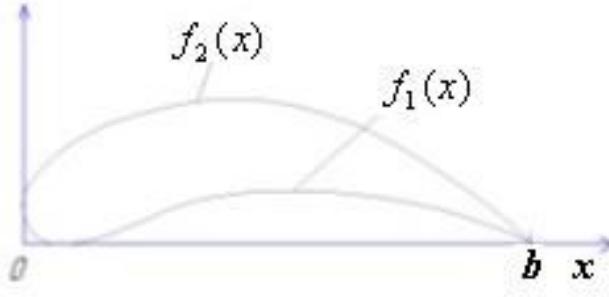


Рис. 1.8. Расчет момента инерции на кручение

На бесконечно малый элемент лопатки действует также момент от сил инерции

$$d\tilde{M}_z^i = -dJ_m \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} ,$$

где массовый момент инерции

$$dJ_m = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dF dz = \rho dz \int_F r^2 dF = \rho dz J_\rho .$$

$$\text{Тогда } d\tilde{M}_z^i = -\rho J_\rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} dz$$

Рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента лопатки (рис. 1.9):

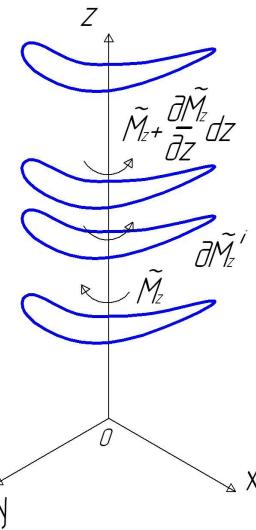


Рис.1.9. Бесконечно малый элемент лопатки
и приложенные к нему динамические силы при крутильных колебаниях

$$\tilde{M}_z + \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial z} dz - \tilde{M}_z - \rho J_\rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} dz = 0 ,$$

откуда

$$\frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial z} = \rho J_\rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.9) и (1.10) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающих крутильные колебания лопатки. Решение будем искать в гармоническом виде

$$\tilde{\beta}_z = \beta_z \cos pt ,$$

$$\tilde{M}_z = M_z \cos pt .$$

Подставив решение в уравнения (1.9) и (1.10), продифференцировав и сократив на $\cos pt$, получим

$$\frac{d\beta_z}{dz} = \frac{1}{GJ_K} M_z ,$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -\rho J_\rho p^2 \beta_z .$$

Выразив M_z из первого уравнения и подставив его во второе, получим

$$\frac{d^2\beta_z}{dz^2} + \frac{\rho J_\rho p^2}{GJ_K} \beta_z = 0 .$$

Обозначим $\alpha^2 = \frac{\rho J_\rho p^2}{GJ_K}$, тогда $p = \alpha \sqrt{\frac{GJ_K}{\rho J_\rho}}$, и

$$\frac{d^2\beta_z}{dz^2} + \alpha^2 \beta_z = 0 .$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение имеет вид $\beta_z = C_1 \cos(\alpha z) + C_2 \sin(\alpha z)$.

Постоянные найдем из граничных условий.

В каждом сечении лопатка имеет одну степень свободы, поэтому получаем по одному граничному условию на каждой границе лопатки.

При $z=0$ при консольном абсолютно жестком закреплении $\beta_z = 0$, откуда следует $C_1 = 0$.

При $z=l$ на свободном краю лопатки $M_z(l) = 0$.

$$M_z = GJ_K \frac{d\beta_z}{dz} = GJ_K C_2 \alpha \cos \alpha l = 0 .$$

Это эквивалентно условию $\cos \alpha l = 0$, $\alpha l = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n=1,2,3\dots$

Значению $\alpha_1 = \frac{\pi}{2l}$ соответствует частота колебаний $p_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ_K}{\rho J_\rho}}$ и

распределение углов поворота по лопатке вида $\beta_z = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2l} z\right)$ (рис. 1.10, вверху). Это – первая крутильная форма колебаний. Ее узловая линия расположена вдоль лопатки.

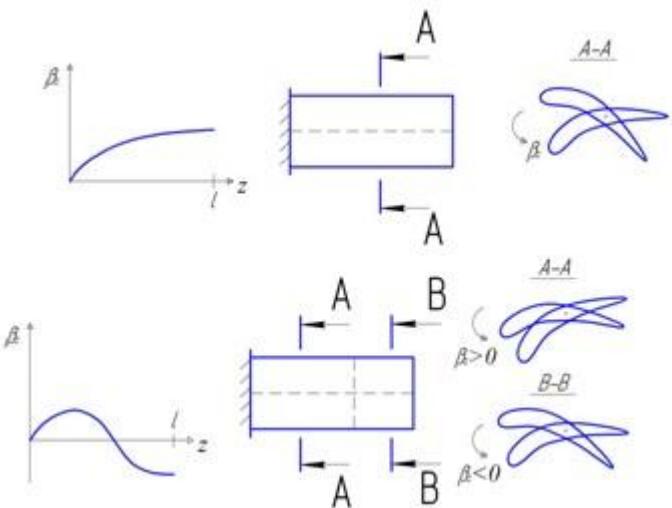


Рис. 1.10. Узловые линии при кривильных колебаниях лопатки

Значению $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2l}$ соответствует частота колебаний $p_2 = \frac{3\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ_K}{\rho J_p}}$ и распределение углов поворота по лопатке вида $\beta_z = C_2 \sin(\frac{3\pi}{2l} z)$ (рис. 1.10, внизу). Это – вторая кривильная форма колебаний. Ей соответствует еще одна узловая линия поперек лопатки. По разные стороны этой линии колебания происходят в противоположных направлениях.

1.5. Классификация форм колебаний лопаток

Лопатка имеет бесконечное количество собственных частот и форм колебаний. Для их качественного описания используются числа n_1 и n_2 . При движении, описываемом числом n_1 , все точки поперечного сечения одновременно смещаются в одну сторону (рис. 1.11 слева). Число n_2 характеризует распределение смещений в поперечном сечении лопатки. При $n_2=1$ все точки смещаются в одну сторону. Это соответствует чисто изгибным колебаниям. При



Рис. 1.11. Изгибные, кривильные и оболочечные колебания

$n_2=2$ часть точек сечения смещается в одну сторону, часть в другую. Это соответствует кривильным колебаниям (рис. 1.11 в центре). При $n_2=3$ происходят более сложные колебания, которые называют оболочечными (рис. 1.11 справа). Формы колебаний можно представить в виде таблицы (рис. 1.12). Частоты колебаний увеличиваются вправо и вниз: $f_{1x1} < f_{2x1} < f_{3x1} < \dots ; f_{1x1} < f_{1x2} < f_{1x3} < \dots$

Реальная лопатка закручена и имеет различную толщину в различных сечениях, ее узловые линии могут быть не прямыми и не перпендикулярными относительно её оси.

$\frac{n}{n_c}$	1	2	3
1			
2			
3			

Рис.1.12. Таблица форм колебаний консольно закрепленной лопатки

1.6. Влияние различных факторов на собственные частоты колебаний лопаток

1. Влияние материала проявляется через сомножитель $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Для используемых в двигателестроении металлических материалов $\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx const$ (с точностью три - пять процентов), и изменение материала на собственную частоту лопатки не влияет. Для композитных материалов это не так, и для них нужно также учитывать анизотропию свойств, то, что $E_x \neq E_y$.

2. Влияние центробежной силы связано с тем, что при отклонении лопатки от положения равновесия при колебаниях у центробежной силы появляется плечо, и появляется момент, возвращающий лопатку в положение равновесия (рис.1.13). Поэтому для вывода лопатки из положения равновесия необходимо преодолеть не только жесткость лопатки, но и действие момента центробежной силы. Это эквивалентно увеличению жесткости лопатки, поэтому частота колебаний при этом увеличивается.

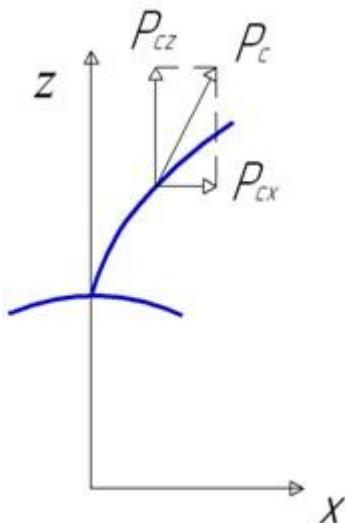


Рис.1.13. Плечо центробежных сил

Различают статическую частоту f_0 лопатки на неподвижном роторе и динамическую частоту f_d , которая растет с увеличением оборотов. Для первой изгибной формы

$$f_d = \sqrt{f_0^2 + Bn^2},$$

где n – обороты ротора,

$$B \approx 0.81 \frac{D_m}{l} - \cos^2 \alpha_m - 0.37,$$

здесь D_m – средний диаметр рабочего колеса, α_m – средний угол установки лопатки.

Влияние центробежной силы наибольшее на низшие формы колебаний. На крутильные колебания центробежная сила не влияет, так как при кручении у нее не появляется плечо.

3. Влияние температуры происходит вследствие уменьшения модуля жесткости E с ростом температуры. Температурная поправка

$$f_t = f_0 \sqrt{\frac{E_t}{E_0}},$$

где E_t – модуль жесткости нагретой лопатки, E_0 – модуль жесткости при нормальной температуре.

Поскольку при увеличении оборотов двигателя растет и температура, влияние температуры накладывается на влияние центробежной силы. Температура лопаток компрессора меняется незначительно, поэтому их динамическая частота только увеличивается. В турбине при больших температурах влияние температуры сильнее, поэтому динамическая частота лопаток на малых оборотах увеличивается, а на больших уменьшается.

4. Влияние геометрических параметров (рис. 1.14) при равномерном изменении по длине лопатки можно оценить, пользуясь приближенными формулами для площади сечения

$$F \approx 0.7b\delta_{\max}$$

и момента инерции профиля

$$J_y \approx 0.41b\delta_{\max}(\delta_{\max}^2 + l_{\max}^2)$$

(здесь b – хорда лопатки, δ_{\max} – максимальная толщина ее профиля, l_{\max} – максимальный подъем средней линии, см. рис. 1.14).

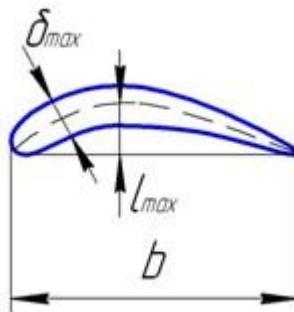


Рис. 1.14. Геометрические параметры профиля лопатки

$$p_i = \left(\frac{Ki}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{0.41Eb\delta_{\max}(\delta_{\max}^2 + l_{\max}^2)}{0.7\rho b\delta_{\max}}}.$$

Видно, что хорда лопатки на частоту не влияет, увеличение длины существенно уменьшает частоту, увеличение δ_{\max} и l_{\max} – увеличивает частоту.

5. При неодинаковом изменении геометрических параметров по длине лопатки жесткость лопатки определяется теми участками, где имеются большие относительные деформации (вблизи мест закрепления или узловых линий), а инерционные свойства – теми участками, где имеются большие перемещения (вдали от мест закрепления или узловых линий). Например, при увеличении толщины лопатки в корневом сечении, увеличится ее жесткость и вырастет частота первой изгибной формы (рис. 1.15, первый рисунок). При увеличении толщины лопатки на периферии увеличатся ее инерционные свойства, и частота первой изгибной формы уменьшится (рис. 1.15, второй рисунок).

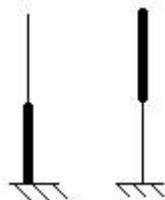


Рис. 1.15. Утолщение различных сечений лопатки

При подрезке угла (рис. 1.16) уменьшаются инерционные свойства периферии, что также вызовет увеличение частоты первой изгибной формы.

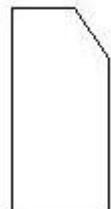


Рис. 1.16. Лопатка со срезанным уголком

2. КОЛЕБАНИЯ ДИСКА РАБОЧЕГО КОЛЕСА

Диск будем рассматривать как круглую пластину переменной толщины в рамках модели Тимошенко. Для пластины в цилиндрической системе координат:

$$\tilde{M}_r = D \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} - \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r} \tilde{\beta}_r \right) , \quad (2.1)$$

$$\tilde{Q}_r = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial r} - \tilde{\beta}_r \right) , \quad (2.2)$$

$$\tilde{M}_{r\varphi} = -\tilde{M}_{\varphi r} = \frac{1}{2} D(1-\mu) \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \tilde{\beta}_\varphi - \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{r \partial \varphi} \right) , \quad (2.3)$$

$$\tilde{M}_\varphi = D \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \tilde{\beta}_r - \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} \right) , \quad (2.4)$$

$$\tilde{Q}_\varphi = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial \tilde{q}_r}{r \partial \varphi} + \tilde{\beta}_\varphi \right) , \quad (2.5)$$

где D – цилиндрическая жесткость, k учитывает характер распределения напряжений.

$\tilde{M}_{r\varphi}$ - крутящий момент, который образуется от касательных напряжений на площадке с нормалью r . \tilde{Q}_r - погонная перерезывающая сила, которая возникает от касательных напряжений. Она действует в направлении оси Z на площадке с нормалью r . \tilde{M}_φ - скручивающий момент, который возникает от нормальных напряжений на площадке с нормалью φ . $\tilde{M}_{\varphi r}$ - крутящий момент от касательных напряжений на площадке с нормалью φ . \tilde{Q}_φ - погонная перерезывающая сила от касательных напряжений $\tau_{z\varphi}$, действующая в направлении оси Z на площадке с нормалью φ .

Выделим элемент диска двумя радиальными плоскостями, расположенными под углом $d\varphi$, и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и dr (рис.2.1).

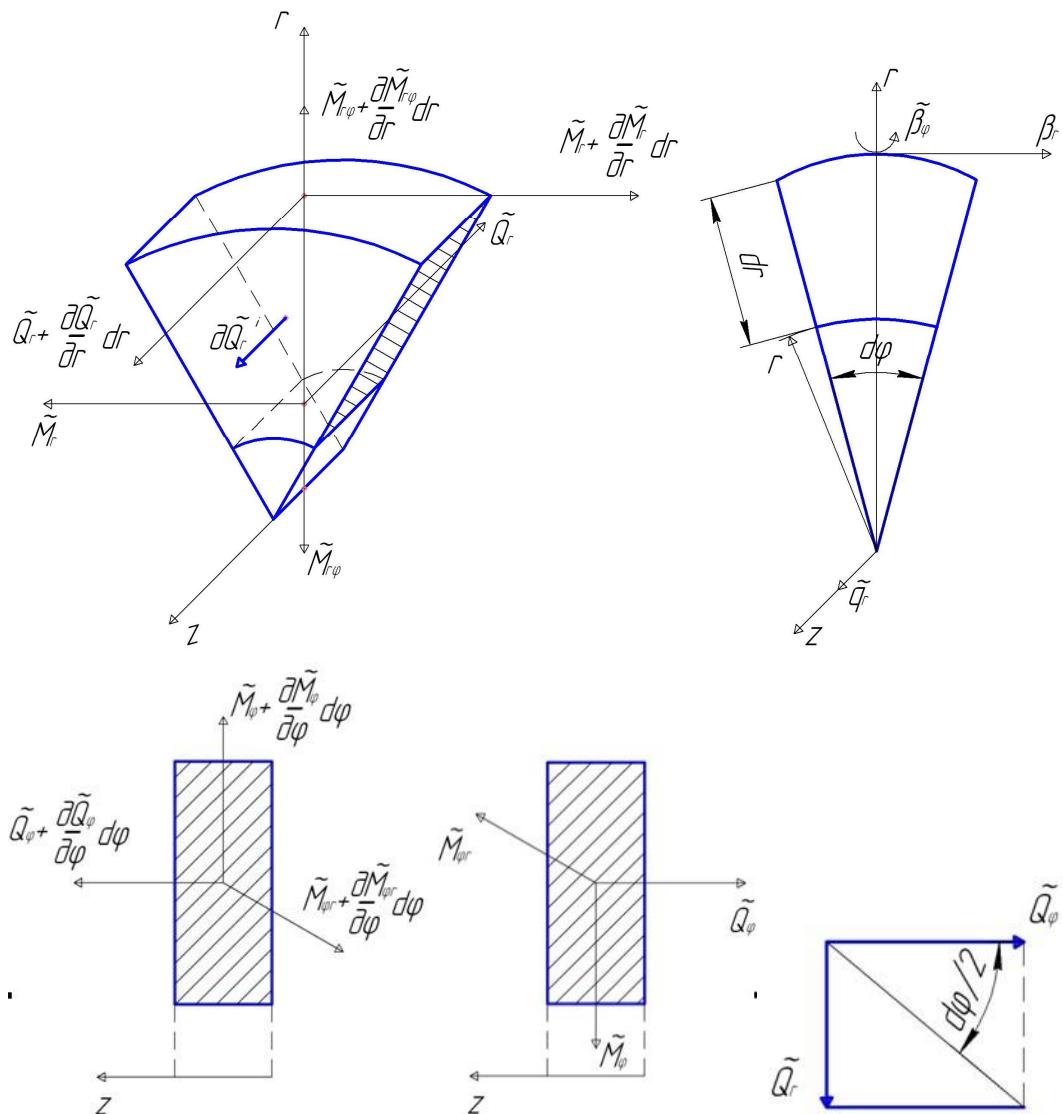


Рис.2.1. Бесконечно малый элемент диска и действующие на него динамические силы

Получим систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания диска, из рассмотрения уравнений (2.1) – (2.5) и условий равновесия элемента диска.

Из (2.1) (также умножив и разделив на r) получим

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} = \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{\mu}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{1}{Dr} (\tilde{M}_r r) . \quad (2.6)$$

Из (2.3) получим

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \tilde{\beta}_\varphi + \frac{2}{D} \frac{(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{r(1-\mu)} \quad (2.7)$$

Из (3.2)

$$\frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial r} = \tilde{\beta}_r + \frac{2(1+\mu)}{k^2 Ehr} (\tilde{Q}_r r) \quad (2.8)$$

Преобразуем (2.4), подставив $\frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r}$ из (2.6):

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\varphi &= D\left(\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \tilde{\beta}_r - \mu^2 \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial r} + \frac{\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r - \frac{\mu}{Dr} (\tilde{M}_r r)\right) = \\ &= D\left(\frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1-\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r - \frac{\mu}{Dr} (\tilde{M}_r r)\right)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Сила инерции

$$dQ_r^i = -rdrd\varphi h\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Рассмотрим равновесие элемента. Проекции сил на ось Z :

$$(\tilde{Q}_r + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} dr)(r + dr)d\varphi - \tilde{Q}_r r d\varphi + (\tilde{Q}_\varphi + \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi)dr - \tilde{Q}_\varphi dr - rdrd\varphi h\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} = 0 \quad (2.11)$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}(\tilde{Q}_r + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} dr)(r + dr) &= \tilde{Q}_r r + \tilde{Q}_r dr + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial \varphi} r dr + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} (dr)^2 \approx \\ &\approx \tilde{Q}_r r + (\tilde{Q}_r \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} r) dr = \tilde{Q}_r r + \frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} dr\end{aligned}\quad (2.12)$$

С учетом (3.12), (3.11) примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_r r d\varphi + \frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} dr d\varphi - \tilde{Q}_r r d\varphi + \tilde{Q}_\varphi dr + \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dr - \tilde{Q}_\varphi dr - rdrd\varphi h\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} &= 0 , \\ \frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} dr d\varphi + \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dr - rdrd\varphi h\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} &= 0 .\end{aligned}$$

Поделив на $drd\varphi$, получим

$$\frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} = -\frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} + rh\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.13)$$

Продифференцируем (3.5) по φ :

$$\frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{r \partial \varphi^2} + \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Подставив это в (3.13), получим

$$\frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} = -\frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{r \partial \varphi^2} - \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \rho rh \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

Сумма моментов относительно оси r :

$$\begin{aligned}(\tilde{M}_{r\varphi} + \frac{\partial \tilde{M}_{r\varphi}}{\partial r} dr)(r + dr)d\varphi - \tilde{M}_{r\varphi} r d\varphi + (\tilde{M}_\varphi + \frac{\partial \tilde{M}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi)dr \cos \frac{d\varphi}{2} - \\ - \tilde{M}_\varphi dr \cos \frac{d\varphi}{2} - 2\tilde{M}_{\varphi r} dr \sin \frac{d\varphi}{2} - \tilde{Q}_\varphi r dr d\varphi = 0\end{aligned}$$

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, полагая $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1$ и $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$,

получаем

$$\frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial r} dr d\varphi + \frac{\partial \tilde{M}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dr - \tilde{M}_{\varphi r} dr d\varphi - \tilde{Q}_\varphi r dr d\varphi = 0 .$$

Разделив на $drd\varphi$ и учитя $\tilde{M}_{r\varphi} = \tilde{M}_{\varphi r}$, а также умножив и разделив на r , получим:

$$\frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi}r)}{\partial r} = -\frac{\partial\tilde{M}_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}(\tilde{M}_{r\varphi}r) + \tilde{Q}_\varphi r.$$

Подставив \tilde{M}_φ и \tilde{Q}_φ из (2.9) и (2.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi}r)}{\partial\varphi} &= -D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi^2} + D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial\varphi} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}(\tilde{M}_{r\varphi}r) + \\ &+ \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial\varphi} + \frac{k^2 Ehr}{2(1+\mu)} \tilde{\beta}_\varphi \end{aligned} \quad (2.15)$$

Проекции моментов на окружное направление:

$$\begin{aligned} (\tilde{M}_r + \frac{\partial\tilde{M}_r}{\partial r} dr)(r + dr)d\varphi - \tilde{M}_r rd\varphi + (\tilde{M}_{\varphi r} + \frac{\partial\tilde{M}_{\varphi r}}{\partial\varphi} d\varphi)dr \cos \frac{d\varphi}{2} - \\ - \tilde{M}_{\varphi r} dr \cos \frac{d\varphi}{2} - 2\tilde{M}_\varphi dr \sin \frac{d\varphi}{2} + \tilde{Q}_r rdrd\varphi = 0 \end{aligned}$$

Раскроем скобки аналогично (2.12):

$$\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} drd\varphi + \frac{\partial\tilde{M}_{\varphi r}}{\partial\varphi} d\varphi dr + \tilde{M}_\varphi drd\varphi + (\tilde{Q}_r r)drd\varphi = 0 .$$

Разделив на $drd\varphi$, а также умножив и разделив на r , получим:

$$\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi}r)}{\partial\varphi} - \tilde{M}_\varphi - (\tilde{Q}_r r) .$$

Подставив \tilde{M}_φ из (2.9), получим

$$\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi}r)}{\partial\varphi} - D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi} + D \frac{1-\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{\mu}{r}(\tilde{M}_r r) - (\tilde{Q}_r r) . \quad (2.16)$$

Уравнения (2.8), (2.6), (2.7), (2.14), (2.16), (2.15) образуют систему (2.17) относительно 6 переменных

$$\tilde{q}_r, \tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_\varphi, (\tilde{Q}_r r), (\tilde{M}_\varphi r), (\tilde{M}_{r\varphi}r).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial r} &= \tilde{\beta}_r + \frac{2(1+\mu)}{k^2 Ehr} (\tilde{Q}_r r) \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} &= \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{\mu}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{1}{Dr} (\tilde{M}_r r) \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial r} &= \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \tilde{\beta}_\varphi + \frac{2}{D} \frac{(\tilde{M}_{r\varphi}r)}{r(1-\mu)} \\ \frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} &= -\frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{r \partial \varphi^2} - \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \rho rh \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial \varphi} - D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + D \frac{1-\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{\mu}{r} (\tilde{M}_r r) - (\tilde{Q}_r r) \\ \frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial \varphi} &= -D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi^2} + D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (\tilde{M}_{r\varphi} r) + \\ &+ \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial \varphi} + \frac{k^2 Ehr}{2(1+\mu)} \tilde{\beta}_\varphi\end{aligned}$$

Решение системы (2.17) должно быть периодическим по φ .

$$\tilde{q}_r(r, \varphi, t) = q_r(r, \varphi + 2\pi, t).$$

Поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_r(r, \varphi, t) &= q_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ \tilde{\beta}_r(r, \varphi, t) &= \beta_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ \tilde{\beta}_\varphi(r, \varphi, t) &= \beta_\varphi(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{Q}_r)(r, \varphi, t)r &= (Q_r(r)r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{M}_r)(r, \varphi, t)r &= (M_r(r)r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{M}_{r\varphi})(r, \varphi, t)r &= (M_{r\varphi}(r)r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma)\end{aligned}\tag{2.18}$$

Здесь p – собственная частота, t – время, γ – сдвиг фазы колебаний.

Подставив (2.18) в (2.17), взяв производные по φ и сократив на $\cos(pt - \gamma)$, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned}\frac{dq_r}{dr} &= \beta_r + \frac{2(1+\mu)}{k^2 Ehr} (Q_r r) \\ \frac{d\beta_r}{dr} &= \frac{\mu}{r} m \beta_\varphi - \frac{\mu}{r} \beta_r + \frac{1}{Dr} (M_r r) \\ \frac{d\beta_\varphi}{dr} &= -\frac{m}{r} \beta_r + \frac{1}{r} \beta_\varphi + \frac{2}{D} \frac{(M_{r\varphi} r)}{r(1-\mu)} \\ \frac{d(Q_r r)}{dr} &= \left(\frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{m^2}{r} - \rho rh p^2 \right) q_r - \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} m \beta_\varphi \\ \frac{d(M_r r)}{dr} &= -\frac{m}{r} (M_{r\varphi} r) - D \frac{1-\mu^2}{r} m \beta_\varphi + D \frac{1-\mu^2}{r} \beta_r + \frac{\mu}{r} (M_r r) - (Q_r r) \\ \frac{d(M_{r\varphi} r)}{d\varphi} &= \left(D \frac{1-\mu^2}{r} m^2 + \frac{k^2 Ehr}{2(1+\mu)} \right) \beta_\varphi - D \frac{1-\mu^2}{r} m \beta_r + \\ &+ \frac{\mu m}{r} (M_r r) - \frac{1}{r} (M_{r\varphi} r) - m \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} q_r\end{aligned}\tag{2.19}$$

Общее решение системы имеет вид

$$\{q_r, \beta_r, \beta_\varphi, Q_r r, M_r r, M_{r\varphi} r\}^T = C_1 \{P^{(1)}\} + \dots + C_6 \{P^{(6)}\},$$

где $\{P^{(1)}\} \dots \{P^{(6)}\}$ – любые линейно независимые частные решения (2.19).

Частные решения находим численным методом. На радиусе начала интегрирования примем

$$\{P^{(1)}\} = \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$

$$\{P^{(2)}\} = \{0,1,0,0,0,0\}^T$$

.....

$$\{P^{(6)}\} = \{0,0,0,0,0,1\}^T .$$

Постоянные $C_1 \dots C_6$ определим из граничных условий.

Рассмотрим определение собственных частот колебаний диска переменного сечения, закрепленного на внутреннем радиусе r_0 и свободного на периферии r_n .

Границные условия на радиусе r_0 :

$$q_r(r_0) = 0, \beta_r(r_0) = 0, \beta_\varphi(r_0) = 0 .$$

$$q_r(r_0) = 0 = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 + \dots + C_6 \times 0 , \text{ отсюда } C_1 = 0 .$$

$$\text{Аналогично получаем } C_2 = C_3 = 0 .$$

Границные условия на радиусе r_n :

$Q_r(r_n)r_n = 0 , M_r(r_n)r_n = 0 , M_{r\varphi}(r_n)r_n = 0 .$ Из этого получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_4 Q_r^{(4)}(r_n)r_n + C_5 Q_r^{(5)}(r_n)r_n + C_6 Q_r^{(6)}(r_n)r_n &= 0 \\ C_4 M_r^{(4)}(r_n)r_n + C_5 M_r^{(5)}(r_n)r_n + C_6 M_r^{(6)}(r_n)r_n &= 0 \\ C_4 M_{r\varphi}^{(4)}(r_n)r_n + C_5 M_{r\varphi}^{(5)}(r_n)r_n + C_6 M_{r\varphi}^{(6)}(r_n)r_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Система имеет решения, если ее определитель равен нулю.

Приведем алгоритм расчета собственных частот колебаний диска:

1. Задается $m=0$.

2. Принимается начальная частота колебаний p_0 .

3. Интегрируется три раза система (2.19) с начальными значениями

$$\{P^{(4)}\} = \{0,0,0,1,0,0\}^T$$

$$\{P^{(5)}\} = \{0,0,0,0,1,0\}^T$$

$$\{P^{(6)}\} = \{0,0,0,0,0,1\}^T .$$

4. Вычисляется определитель системы (2.20) и сравнивается со значением на предыдущем шаге. Если его знак изменился, перейти к п.6. Если не изменился – к п.5.

5. Частота увеличивается на шаг Δp . Перейти к п.3.

6. Меняется шаг $\Delta p = -\Delta p / 2$. Перейти к п.5.

7. Дробление шага продолжается до тех пор, пока не выполнится $\Delta p < \varepsilon$ (погрешности расчета).

8. Определяется собственная частота p_i .

9. Принимается начальная частота $p_0 = p_i + 2\varepsilon$. Перейти к п.3.

10. Если найдены все собственные частоты колебаний для заданного m (в пределах рассматриваемого диапазона частот), то $m=m+1$. Перейти к п. 1.

После расчета собственных частот рассчитываются собственные формы колебаний диска. В выражении $\tilde{q}_r(r, \varphi, t) = q_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma)$ первые два сомножителя определяют распределение амплитуды колебаний по диску.

При $m=0$ амплитуды во всех точках окружности одинаковы.

При $m=1$ имеются две линии, на которых амплитуда колебаний равна нулю. Эти линии образуют узловой диаметр (рис. 2.2).

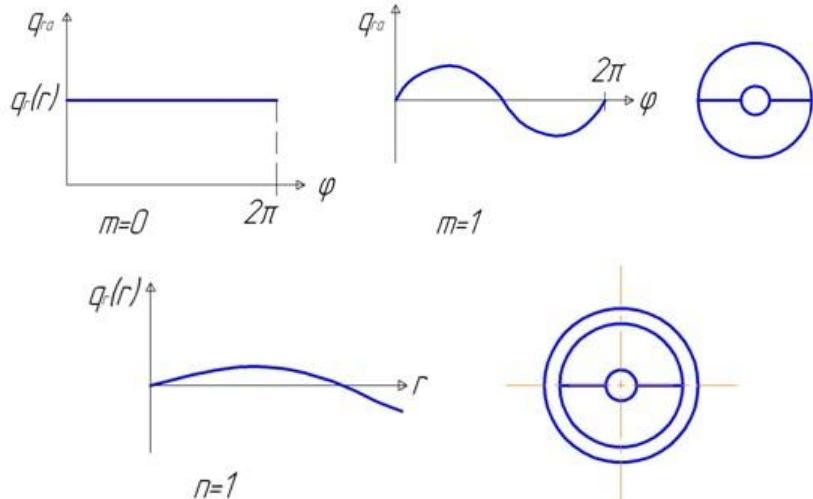


Рис.2.2. Колебания диска с узловыми диаметрами и узловыми окружностями

При $m=2$ имеются четыре линии, на которых амплитуда колебаний равна нулю. Эти линии образуют два узловых диаметра. И т.д.

Функция $q_r(r)$ также может менять знак по радиусу диска. При $n=0$ все значения $q_r(r)$ в один и тот же момент времени имеют одинаковый знак. Амплитуды колебаний с ростом m в центре убывают. При большом значении m колебляется только обод диска.

При $n=1$ функция $q_r(r)$ имеет одну перемену знака по радиусу диска. При этом появляется узловая окружность (см. рис. 2.2). При $n=2$ функция $q_r(r)$ имеет две перемены знака по радиусу диска. При этом появляются две узловых окружности. И т.д.

Формы колебаний с $m=0$ и различным количеством узловых окружностей называют зонтичными.

С увеличением m и n частота колебаний растет, за единственным исключением:

$$f_{10} < f_{00} .$$

Формы колебаний диска можно представить в виде таблицы (рис.2.3).

$\frac{m}{n}$	0	1	2
0			
1			
2			

Рис. 2.3. Таблица форм колебаний центрально закрепленного диска

Удобно представить частоты колебаний в виде единого графика в зависимости от количества узловых диаметров m . Такой график называют спектром колебаний диска (рис. 2.4).

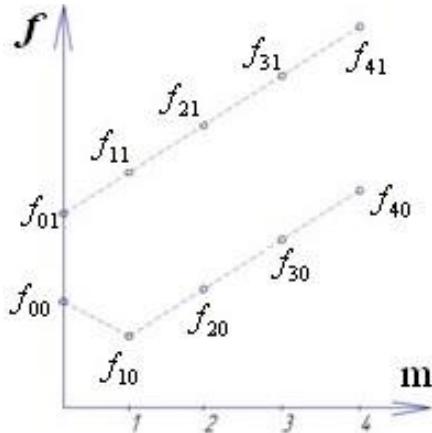


Рис. 2.4. Спектр колебаний диска

Поскольку лопатки увеличивают массу на ободе диска, собственные частоты колебаний диска с лопатками уменьшаются. Узловые диаметры могут проходить только между лопатками, поэтому их количество у диска с лопатками не бесконечно, а ограничено числом $z/2$, если количество лопаток z четное, и $(z-1)/2$, если количество лопаток нечетное.

Узловые окружности зонтичных форм колебаний диска с лопатками могут проходить по лопаткам (рис. 2.5).

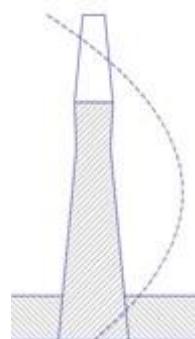


Рис. 2.5. Форма колебаний диска с лопатками

Все незонитичные ($m > 1$) формы колебаний являются парными. Кроме решения (2.18) существует решение

$$\begin{aligned} \tilde{q}_r(r, \varphi, t) &= q_r(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ \tilde{\beta}_r(r, \varphi, t) &= \beta_r(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ \tilde{\beta}_\varphi(r, \varphi, t) &= \beta_\varphi(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{Q}_r)(r, \varphi, t)r &= (Q_r(r)r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{M}_r)(r, \varphi, t)r &= (M_r(r)r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{M}_{r\varphi})(r, \varphi, t)r &= (M_{r\varphi}(r)r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Его подстановка в систему (2.17) приводит к системе, аналогичной (2.19). Частоты колебаний при этом будут те же самые, но распределение смещений будет сдвинуто на $1/4$ волны, то есть на угол $\frac{\pi}{2m}$. Парные формы колебаний не зависят друг от друга. Пусть

$$\tilde{q}_r^* = D^* \bar{q}_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma^*) ,$$

$$\tilde{q}_r^{**} = D^{**} \bar{q}_r(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma^{**}) ,$$

где D^* , D^{**} , γ^* , γ^{**} - соответственно, амплитуды и сдвиги фаз, которые зависят от начальных условий, $q_r(r)$ - распределение смещений по радиусу диска ($\bar{q}_r(r)_{\max} = 1$). При колебаниях диска возбуждаются обе парные формы, результатом является их суперпозиция. Рассмотрим частные случаи.

1. $\gamma^* = \gamma^{**} = \gamma$. Результирующее движение

$$\begin{aligned} \tilde{q}_r &= (D^* \bar{q}_r(r) \cos m\varphi + D^{**} \bar{q}_r(r) \sin m\varphi) \cos(pt - \gamma) = \\ &= \bar{q}_r(r) D \cos(m\varphi - \psi) \cos(pt - \gamma) . \end{aligned}$$

Здесь $D = \sqrt{D^* + D^{**}}$, $\psi = \arctg \frac{D^{**}}{D^*}$.

Видно, что диск имеет m узловых диаметров. Их положение определяется из условия $\tilde{q}_r = 0$ при $\cos(m\varphi - \psi) = 0$. Отсюда

$$m\varphi - \psi = \frac{\pi}{2} + \pi k ,$$

$$\varphi = \frac{\psi}{m} + \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi k}{m} .$$

Положение узловых линий в этом случае не зависит от времени. Это – колебания со стоячими волнами.

Положение узловых линий зависит от соотношения D^* и D^{**} , которое зависит от начальных условий и может быть любым – следовательно, положение узловых линий произвольное.

2. Пусть $D^* = D^{**} = D$, возбуждение колебаний приложено к точке 1 диска и перемещается по окружности (рис. 2.6). Для формы $m=1$ узловая линия имеет вид диаметра. Если для формы \tilde{q}_r^{**} она проходит через точку 1, форма \tilde{q}_r^{**} возбуждаться не будет (энергия передается посредством работы, а работа при нулевом перемещении равна нулю). Будет возбуждаться перпендикулярная узловая линия формы \tilde{q}_r^* . Когда источник возбуждения колебаний перейдет в точку 3 (под углом 90°), перестанет возбуждаться форма \tilde{q}_r^* , но появится форма \tilde{q}_r^{**} . При положении источника в промежуточной точке 2, возбуждается суперпозиция форм \tilde{q}_r^* и \tilde{q}_r^{**} , линия, противоположная точке 2.

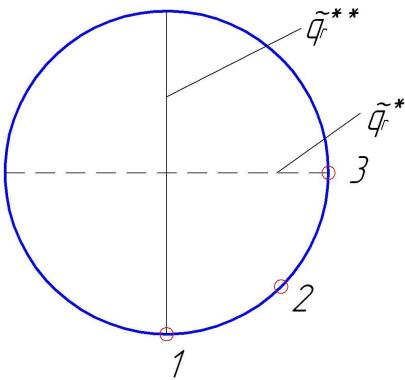


Рис.2.6. Возбуждение парных форм колебаний

Таким образом, узловые линии стоячих волн перемещаются по диску при перемещении источника возбуждения колебаний.

3. Возможны также колебания диска с бегущими волнами. Пусть $D^* = D^{**} = D$, $\gamma^* = \frac{\pi}{2}$, $\gamma^{**} = 0$. Результирующее колебание

$$\tilde{q}_r = \tilde{q}_r^* + \tilde{q}_r^{**} = D\bar{q}_r(r)(\cos m\varphi \sin pt + \sin m\varphi \cos(pt)) = D\bar{q}_r(r)\sin(m\varphi + pt).$$

Узловые линии определяются выражением $\sin(m\varphi + pt) = 0$, откуда

$$m\varphi + pt = \pi k, \quad \varphi = -\frac{p}{m}t + \frac{\pi k}{m}.$$

Видно, что положение узловых линий зависит от времени. Это – колебания с бегущей волной. Угловая скорость вращения узловых линий

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{p}{m},$$

так как она отрицательна, это – колебания с назад бегущей волной.

4. Если $D^* = D^{**} = D$, $\gamma^* = 0$, $\gamma^{**} = \frac{\pi}{2}$, то

$$\tilde{q}_r = D\bar{q}_r(r)(\cos m\varphi \cos pt + \sin m\varphi \sin(pt)) = D\bar{q}_r(r)\cos(m\varphi - pt).$$

Узловые линии определяются выражением $\cos(m\varphi - pt) = 0$, откуда

$$m\varphi - pt = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \varphi = \frac{p}{m}t + \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi k}{m}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{m}.$$

Это – колебания с вперед бегущей волной.

В ГТД все резонансные колебания происходят с назад бегущей волной. Автоколебания – в 90% случаев с вперед бегущей волной.

3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАБОЧИХ КОЛЕС ГТД

3.1. Понятие о возбуждающих гармониках

Основной источник колебаний РК – окружная неравномерность поля давлений и поля скоростей в газовом потоке перед и за РК. Действующая на лопатку газовая сила Q_r неодинакова и зависит от условий на входе в двигатель, от обтекания всех элементов проточной части до РК и непосредственно за РК. Так как Q_r периодическая по окружности, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$Q_r = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{rm} \cos(m\varphi_1 - \psi_m). \quad (3.1)$$

Угол φ_1 определяет положение лопатки в неподвижной системе координат, угол φ – в системе координат, вращающейся вместе с РК (рис.3.1).

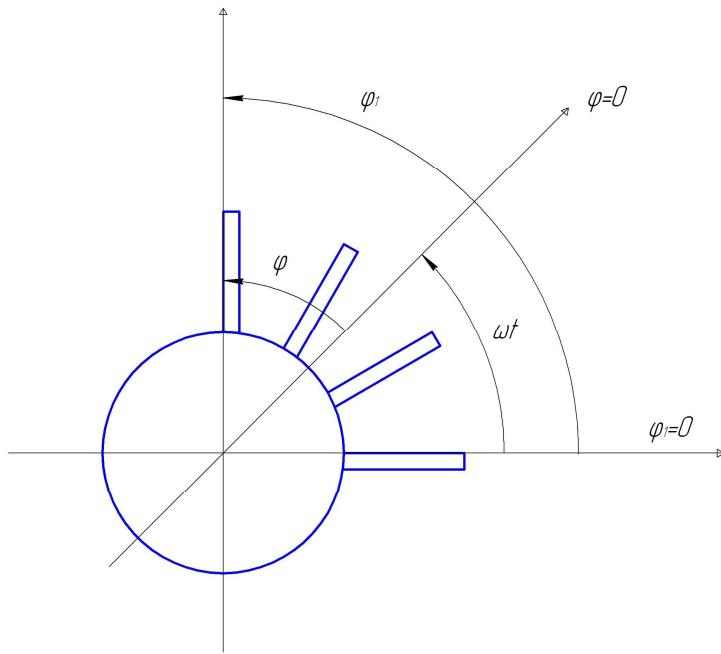


Рис. 3.1. Подвижная и неподвижная системы координат

$$\varphi = \varphi_1 - \omega t$$

$$\text{Отсюда } \varphi_1 = \varphi + \omega t$$

Одно из слагаемых разложения (4.1) имеет вид

$$\tilde{Q}_{rm} = Q_{rm} \cos(m\varphi + m\omega t - \psi_m) = Q_{rm} \cos(m\varphi - \psi_m) \cos m\omega t - Q_{rm} \sin(m\varphi - \psi_m) \sin m\omega t.$$

То есть каждое слагаемое разложения эквивалентно двум нагрузкам с частотой ωt и сдвигом по фазе на 1/4 периода. Это соответствует колебаниям с назад бегущей волной.

Так как каждое слагаемое разложения (3.1) может возбуждать колебания, его называют возбуждающей гармоникой. Так как

$$\frac{m\omega}{2\pi} = mn_{cek},$$

частота возбуждающей гармоники линейно зависит от частоты вращения ротора n_{cek} . m называют номером гармоники. Гармоника с номером m возбуждает только колебания, кратные m . Амплитуда Q_m зависит от условий обтекания элементов проточной части перед и за РК. Если есть конструктивные элементы (лопатки НА, ребра и т.д.) с количеством m , то амплитуда гармоники с номером m будет больше.

3.2. Резонансная диаграмма

Диаграмма, отражающая зависимость собственных частот колебаний РК и частот возбуждающих гармоник от частоты вращения ротора и позволяющая находить режимы работы двигателя, на которых происходят резонансные колебания РК, называется резонансной диаграммой (рис.3.2). На резонансной диаграмме отображаются:

- частотная линия рабочего колеса, показывающая изменение той или иной собственной частоты в зависимости от режима работы двигателя (реально из-за небольшого различия геометрических характеристик лопатки, жесткости закрепления и т.д. это не линия, а полоса шириной около 3% в обе стороны от скелетной линии);
- линии возбуждающих гармоник (прямые с угловым коэффициентом m);
- линии продолжительных рабочих режимов двигателя: максимального, крейсерского, малого газа и т.д. (реально из-за погрешности работы регулятора оборотов это также диапазоны шириной около 3% в обе стороны).

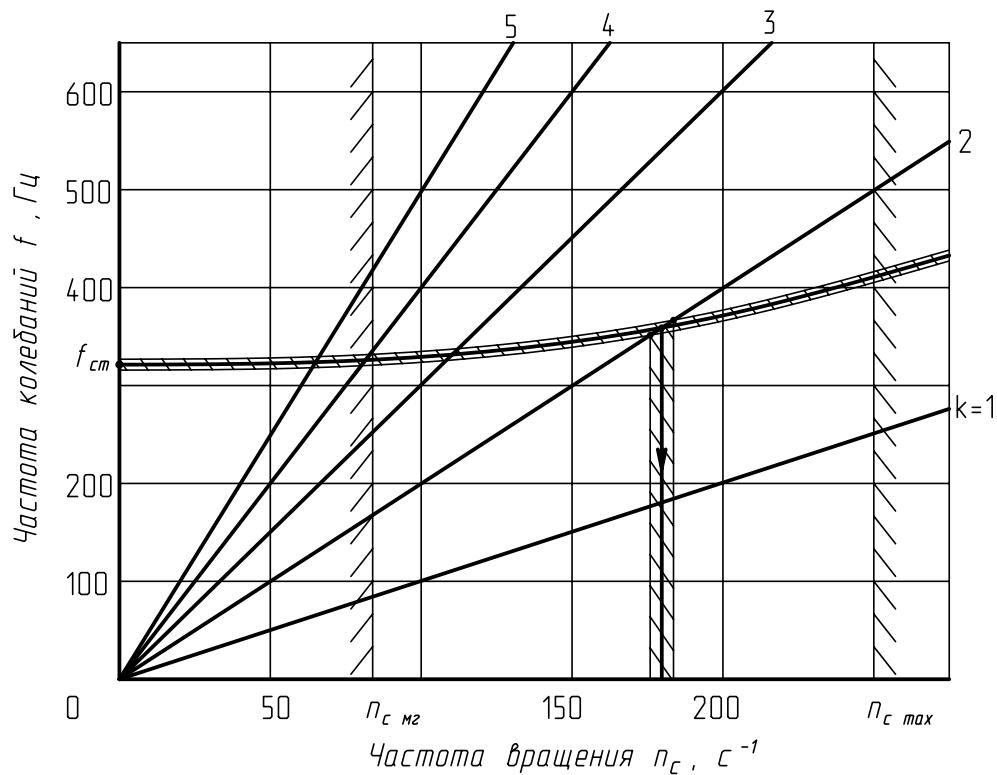


Рис. 3.2. Резонансная диаграмма

Там, где линия возбуждающей гармоники пересекается с частотной линией, имеет место резонанс. Однако опасны только резонансы, совпадающие с продолжительными рабочими режимами. Другие резонансные частоты двигатель достаточно быстро проходит, и опасные колебания не успевают развиться.

3.3. Автоколебания

Автоколебания – это незатухающие колебания, происходящие без воздействия возбуждающих гармоник и других переменных во времени сил. Для возникновения автоколебаний необходим источник энергии и механизм превращения ее в энергию колебаний.

Источником энергии для рабочего колеса является газовый поток. Механизм передачи энергии связан с обтеканием лопаток. Рассмотрим плоскопараллельные автоколебания незакрученной лопатки в незакрученном потоке. Пусть поток набегает на лопатку со скоростью \bar{W} под углом атаки i . Пусть в результате случайного воздействия лопатка вышла из положения равновесия и стала совершать гармонические колебания с частотой p .

$$\tilde{q} = q \sin pt .$$

Разложим движение \tilde{q} на перпендикулярное скорости потока $\tilde{q}_1 = q_1 \sin pt$ и параллельное $\tilde{q}_2 = q_2 \sin pt$. Соответствующие этим движениям скорости равны

$\tilde{V}_1 = \frac{d\tilde{q}_1}{dt} = q_1 p \cos pt$ и $\tilde{V}_2 = \frac{d\tilde{q}_2}{dt} = q_2 p \cos pt$. Таким образом, относительная скорость потока становится равной \vec{W}_1 и угол атаки изменяется на величину Δi (рис. 3.3), причем при $\tilde{V}_1 > 0$ изменение угла атаки $\Delta i < 0$.

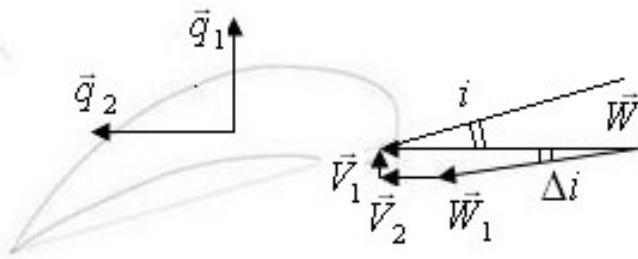


Рис. 3.3. Изменение угла атаки

$$\operatorname{tg} \Delta i \approx -\frac{V_1}{W - V_2} = -\frac{q_1 p \cos pt}{W - q_2 p \cos pt}.$$

Так как q_1 и q_2 малы, $\operatorname{tg} \Delta i \approx \Delta i$, $W - q_2 p \cos pt \approx W$, $\Delta i \approx -\frac{q_1 p \cos pt}{W}$.

На лопатку действует аэродинамическая сила $Q_a = \frac{1}{2} \rho b W^2 C_y$. Здесь ρ - плотность потока, b - хорда лопатки, C_y - коэффициент подъемной силы. Он зависит от угла атаки (рис. 3.4).

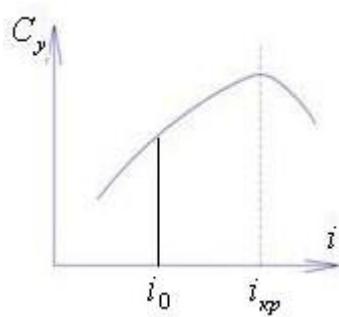


Рис. 3.4. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки

Разложим C_y в ряд Тейлора в окрестностях i_0 :

$$C_y = C_{y0} + \frac{dC_y}{di} \Delta i + \frac{d^2 C_y}{di^2} \frac{\Delta i^2}{2} + \dots$$

Оставив два первых слагаемых разложения, получаем

$$C_y = C_{y0} + \frac{dC_y}{di} \Delta i = C_{y0} - \frac{q_1 p}{W} \frac{dC_y}{di} \cos pt$$

Соответственно аэродинамическая сила будет переменной во времени:

$$Q_a = \frac{1}{2} \rho b W^2 (C_{y0} - \frac{q_1 p}{W} \frac{dC_y}{di} \cos pt) = \frac{1}{2} \rho b W^2 C_{y0} - \frac{1}{2} \rho b W q_1 p \frac{dC_y}{di} \cos pt = Q_{a0} - B \frac{dC_y}{di} \cos pt$$

Найдем работу аэродинамической силы на перемещении лопатки.

$$dA = Q_a d\tilde{q} = Q_a qp \cos pt \times dt .$$

Работа за период колебаний Т

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T Q_a qp \cos pt \times dt = \int_0^{2\pi} Q_{a0} q \cos pt \times d(pt) - \int_0^{2\pi} q B \cos^2 pt \frac{dC_y}{di} d(pt) = \\ &= 0 - B q \frac{dC_y}{di} \int_0^{2\pi} \cos^2 ptd(pt) = -\pi B q \frac{dC_y}{dt} \end{aligned}$$

Если $\frac{dC_y}{dt} > 0$ (докритическое обтекание, см. рис. 4.4), то $A < 0$, энергия колебаний

лопатки рассеивается. Рассеивание энергии колебаний за счет взаимодействия с набегающим потоком называется аэродинамическим демпфированием.

Если $\frac{dC_y}{dt} < 0$ (закритическое обтекание), то $A > 0$, газовый поток добавляет

лопатке энергию, и амплитуда ее колебаний будет увеличиваться до разрушения.

По нормам прочности автоколебания недопустимы. При их возникновении необходим перерасчет течения газа в двигателе, чтобы не допускать закритического обтекания лопаток.

3.4. Борьба с опасными колебаниями рабочих колес

Борьба с колебаниями рабочих колес – сложная задача, не имеющая универсальных решений. Всякое предлагаемое мероприятие может быть, с одной стороны, недостаточно эффективным, а с другой стороны, ухудшает какие-то иные параметры двигателя. Борьба с колебаниями ведется по трем направлениям.

1. Уменьшение силы, вызывающей колебания.

Поскольку источником колебаний является окружная неравномерность газовой силы, меры борьбы с колебаниями направлены на уменьшение этой неравномерности.

Неравномерность газового потока за лопаткой уменьшается очень быстро, пропорционально $\frac{1}{\Delta^3}$ (где Δ - расстояние до источника неравномерности), поэтому небольшое увеличение расстояния между рабочим колесом и направляющим аппаратом (рис. 3.5) дает значительный эффект. Однако при этом увеличиваются габариты и вес двигателя.

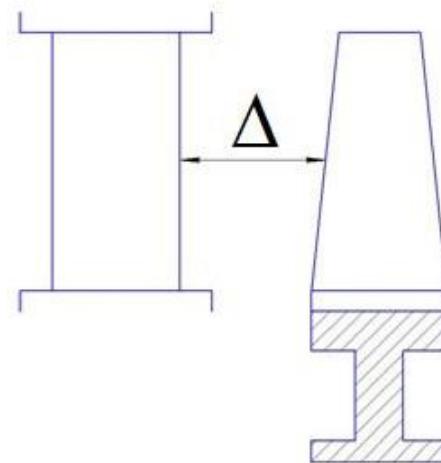


Рис. 3.5. Увеличение расстояния между рабочим колесом и направляющим аппаратом

В случае применения наклонного направляющего аппарата (рис. 3.6) рабочая лопатка попадает в зону неравномерности потока, вызванную направляющим аппаратом, не одновременно по всей своей высоте, а только в окрестностях точки A, которая к тому же перемещается по высоте лопатки по мере ее поворота вокруг оси двигателя. Однако наклоненный направляющий аппарат тяжелее обычного.

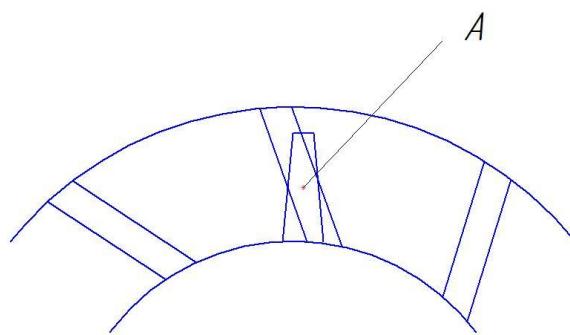


Рис. 3.6. Наклонный направляющий аппарат

Для уменьшения сил, вызывающих колебания, желательно неравномерное расположение стоек опор, ребер и т.д. (так, на рис. 3.7 желательно $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$). Однако

при этом жесткость конструкции будет различна в различных направлениях, а анизотропия опор нежелательна при колебаниях валов двигателя.

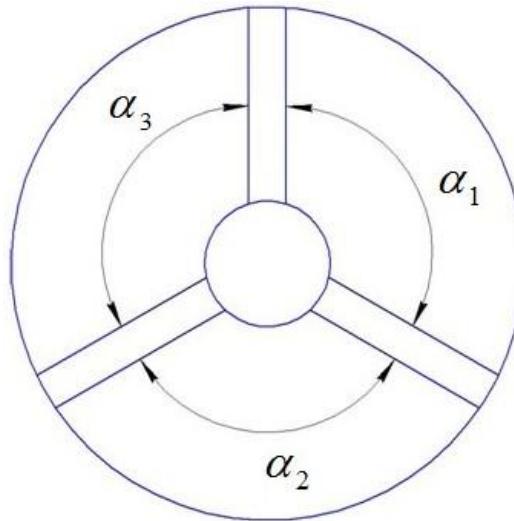


Рис. 3.7. Неравномерное расположение ребер

Нежелательно применение конструкций, увеличивающих неравномерность газового потока. Например, если клапан перепуска установлен непосредственно на проточную часть, при его открытии возникнет очень значительная окружная неравномерность. Поэтому обычно в проточной части выполняется много маленьких отверстий по окружности, выводящих в ресивер, а клапан перепуска размещается на ресивере против того места на окружности, где отверстия отсутствуют. Выпуск воздуха через много распределенных по окружности малых отверстий искажает газовый поток не так сильно, как могло бы искажить одно большое отверстие к перепускному клапану. По этой же причине порой применяются ленты перепуска, открывающие щель для выхода воздуха почти по всей окружности.

2. Частотная отстройка.

Частотная отстройка является наиболее распространенным способом борьбы с колебаниями лопаток.

Необходимость отстройки определяется на этапе проектирования при помощи резонансной диаграммы. Как и для роторов ГТД, применяется частотная отстройка вверх или вниз. Поскольку собственные частоты лопаток имеют небольшие индивидуальные различия, а регулятор двигателя также поддерживает обороты с некоторой индивидуальной погрешностью, отстройка от резонанса должна быть не менее, чем на 10% по оборотам двигателя.

Изменение собственной частоты лопатки обычно производится при помощи изменения толщины ее сечений в требуемых местах (применение шарнирного замка, устраняющего первую изгибную форму колебаний, также можно рассматривать как способ частотной отстройки). Если изменение толщины сечения превышает 20%, необходимо перепрофилировать лопатку, произведя новый расчет течения газа через лопаточную решетку. В качестве экстренного способа частотной отстройки применяется подрезка уголков лопатки (например, турбина двигателя Р11-300), но это нежелательно, так как рассчитанное оптимальное течение газа в таком случае будет искажено.

После частотной отстройки необходим повторный расчет статической прочности лопатки, так как ее сечения были изменены.

Частотную отстройку затрудняет то, что, уходя от одного резонанса, можно попасть на другой. Против автоколебаний частотная отстройка бесполезна.

Для дисков ГТД частотная отстройка также является наиболее распространенным способом борьбы с колебаниями (тем более, что применение демпферов в дисках не всегда возможно). Изменение собственных частот диска осуществляется за счет изменения его сечения.

3. Демпфирование.

Для борьбы с колебаниями лопаток и дисков применяются, как правило, демпферы сухого трения.

Энергия колебаний может рассеиваться при трении проволок внутри троса, пропущенного через отверстия в пере лопатки (рис. 4. 8, а). Трос может быть заменен трубкой (рис. 4. 8, б), при этом трение реализуется между поверхностями трубы и отверстия в пере лопатки. Трение может осуществляться между боковыми поверхностями антивibrationных (рис. 4. 8, в) или бандажных полок. Однако все эти демпферы, расположенные в проточной части, ведут к некоторым газодинамическим потерям на их обтекание.

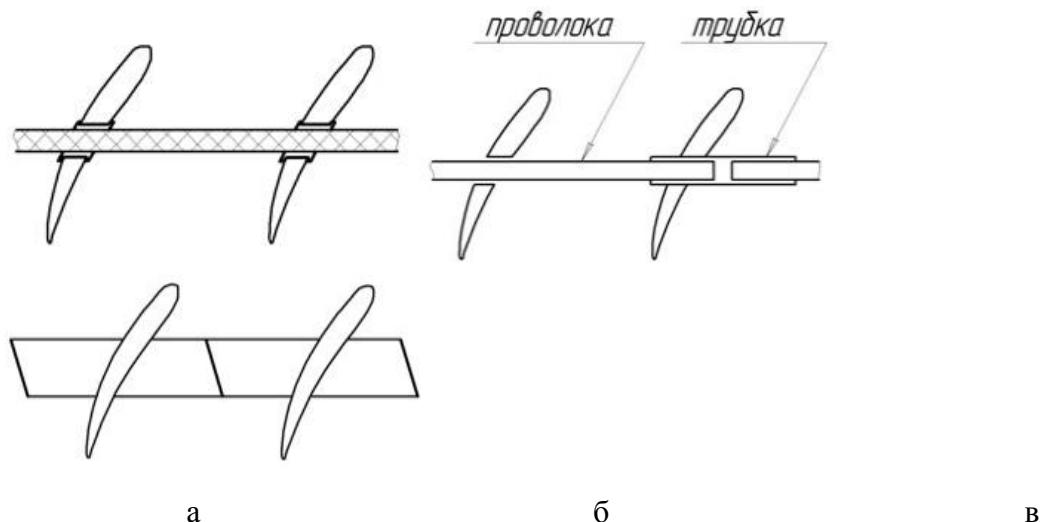


Рис. 3.8. Демпферы лопаток, устанавливаемые в проточной части

Поверхность трения может быть образована разрезом замка или пера лопатки (рис. 3.9, а). На лопатки устанавливаются штифты (рис. 3.9, б), демпфирующие втулки (рис. 3.9, в), многослойные пакеты металлических лент (рис. 3.9, г).

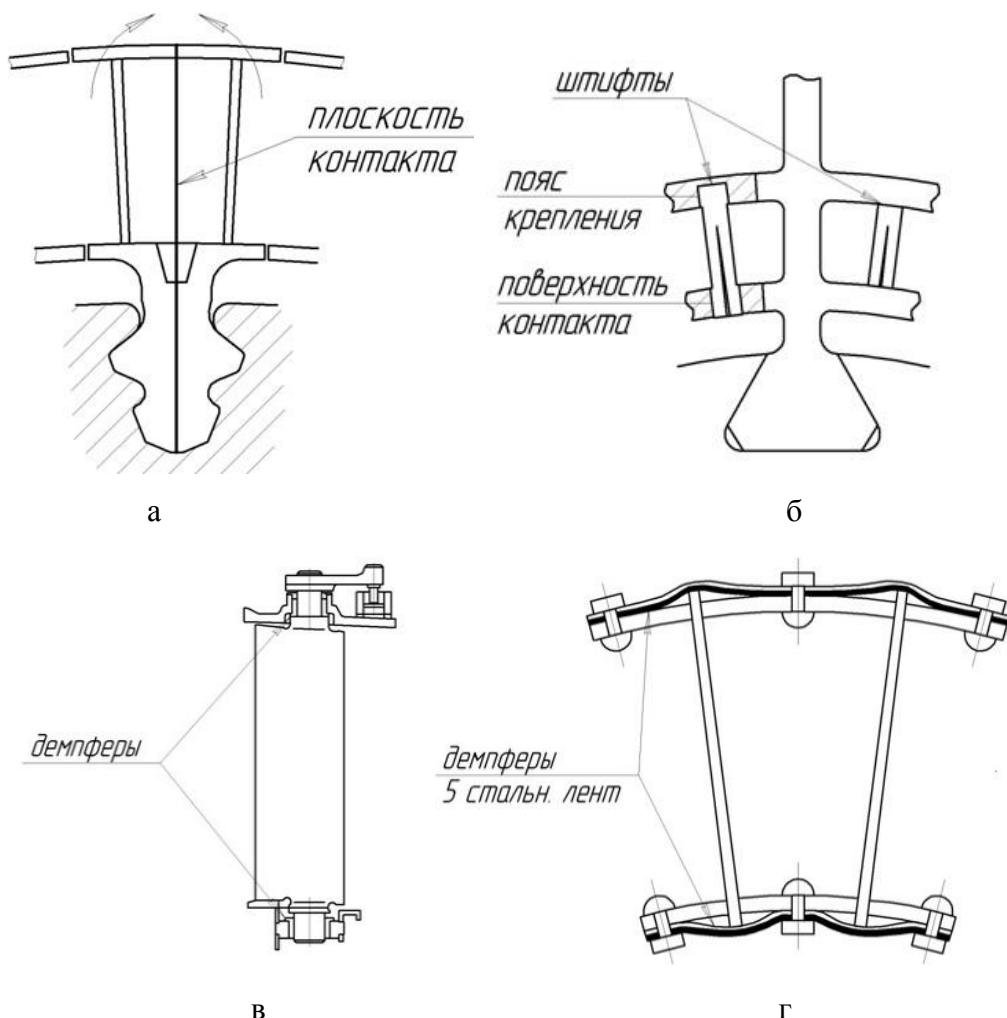


Рис. 3.9. Демпферы колебаний в замках лопаток

Детали из композиционных материалов обладают большим рассеиванием энергии при внутреннем трении в материале (в десятки раз больше, чем у стали). В этом одна из важных причин стремления к применению композиционных материалов.

Демпфирование за счет рассеивания энергии уменьшает амплитуду колебаний на резонансе. Частота при этом изменяется незначительно (на несколько процентов даже при большом демпфировании). В отличие от этого частотная отстройка изменяет собственную частоту колебаний, практически не меняя амплитуду колебаний на резонансе.

4. ЗАЩИТА ОТ ВИБРАЦИИ

Виброизоляция является единственным средством уменьшения динамических нагрузок на агрегаты двигателя и увеличения их работоспособности.

4.1. Необходимые данные для проектирования виброзащитной системы

Для проектирования виброизоляции какого-либо объекта необходимы:

- а) чертежи объекта с указанием возможного расположения мест крепления виброизолаторов;
- б) данные:
 - о весе агрегата m ,
 - о положении центра тяжести агрегата, обычно принимаемом за начало координат при расчете виброзащитной системы (координаты центра тяжести агрегата определяются по формулам:

$$x_o = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n Q_i x_i; y_o = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n Q_i y_i; z_o = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n Q_i z_i; \quad (4.1)$$

где Q_i — вес i -того элемента агрегата; x_i, y_i, z_i — координаты центра тяжести i -того элемента агрегата в системе координат X, Y, Z ; n — число элементов агрегата);

- о моментах инерции J_k агрегата относительно k -ой оси системы координат;
- о действующей вибрации (ее частоте ω_k и амплитуде s_k в направлении k -ой оси системы координат);
- в) характеристика различных подводок (трубопроводов, кабелей и т.д. - их назначение, материал, форма, размеры и др.) с указанием мест их присоединения к объекту;
- г) требования, предъявляемые к виброизоляции:

- допускаемые амплитуды перемещения $[A_k]$ и ускорения $[W_k]$ защищаемого объекта (допускаемое перемещение связано обычно с возможностью разрыва подведенных к объекту трубопроводов и кабелей, с возможностью удара защищаемого объекта о соседние конструкции, с точностью работы агрегата; допускаемое ускорение обычно связано с тем, какие инерционные нагрузки может выдержать объект, не теряя работоспособности);

- эффективность виброзащиты на рабочей частоте, определяемая коэффициентом передачи вибрации $\eta_{kp} = \frac{A_k}{S_k}$ (где A_k - амплитуда перемещения защищаемого объекта в направлении k -ой оси);
- д) сведения о возможности воздействия на виброизоляторы различных агрессивных веществ (топлива, масла и т. п.) и температуре в местах установки виброизоляторов;
- е) требуемый ресурс виброзащитной системы.

4.2. Расчет характеристик виброзащитной системы

Виброизолятор, как любое упругое тело, при деформации несет потенциальную энергию деформирования Π . В виброизоляторе также, как правило, существует трение, благодаря которому рассеивается энергия колебаний. При колебаниях направление деформирования виброизолятора меняется, при этом изменяется также направление силы трения, поэтому в координатах «перемещение δ_k - реакция виброизолятора P_k » процесс нагрузки виброизолятора не совпадает с процессом его разгрузки. Эти процессы вместе образуют петлю гистерезиса виброизолятора, площадь которой $\Delta\Pi$ равна энергии, рассеиваемой за один цикл деформации виброизолятора (рис. 4.1).

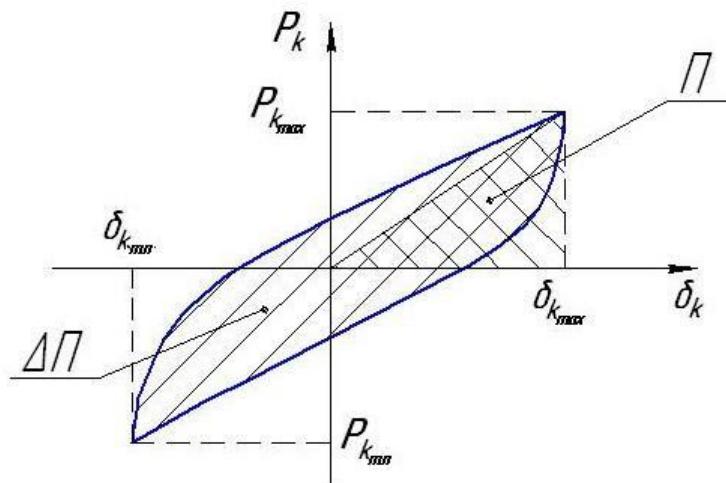


Рис. 4.1. Петля гистерезиса виброизолятора

По петле гистерезиса легко определить экспериментально коэффициент рассеивания энергии виброизолятора $\psi = \frac{\Delta\Pi}{\Pi}$. При решении дифференциального

уравнения колебаний виброзащитной системы обычно используется коэффициент демпфирования $\gamma = \frac{\psi}{2\pi}$.

Воспользовавшись методом гармонической линеаризации, представим упругодемпфирующую характеристику виброизолятора в направлении k -ой оси в виде эллипса

$$P_k = C_k (\delta_k + \gamma_k \operatorname{sign} \dot{\delta}_k \sqrt{A_k^2 - \delta_k^2}) , \quad (4.2)$$

где C_k - жесткость в направлении k -ой оси; $\operatorname{sign} \dot{\delta}_k$ - знак скорости перемещения. Петля гистерезиса виброизоляторов на основе эластомеров и гидропневматических виброизоляторов близка к эллиптической, а для виброизоляторов сухого трения представление петли гистерезиса в виде эллипса ведет к погрешности при расчете резонансной частоты не более 6%.

Тогда при вибрационном кинематическом возбуждении с постоянной амплитудой перемещения s_k дифференциальное уравнение движения виброзащитной системы с одной степенью свободы в абсолютном движении имеет вид

$$\frac{d^2 \xi_k}{dt^2} + \omega_{0k}^2 (\delta_k + \gamma_k \operatorname{sign} \dot{\delta}_k \sqrt{A_k^2 - \delta_k^2}) = 0 , \quad (4.3)$$

где абсолютное ускорение $\frac{d^2 \xi_k}{dt^2} = \frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + s_k \omega_k^2 \sin \omega_k t$, $\omega_{0k} = \sqrt{\frac{C_k}{m}}$ - собственная частота колебаний виброзащитной системы в k -ом направлении, t – время.

В относительном движении

$$\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + \omega_{k0}^2 (\delta_k + \gamma_k \operatorname{sign} \dot{\delta}_k \sqrt{A_k^2 - \delta_k^2}) = -s_k \omega_k^2 \sin \omega_k t . \quad (4.4)$$

Решив это уравнение, можно определить амплитуду деформации виброизолятора

$$A_k = s_k \sqrt{\frac{1 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2 \right)^2 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2}} , \quad (4.5)$$

откуда коэффициент передачи вибрации

$$\eta_k = \frac{A_k}{s_k} = \sqrt{\frac{1 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2 \right)^2 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2}} . \quad (4.6)$$

На резонансе амплитуда деформации равна

$$A_{k0} = s_k \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_k^2}} . \quad (4.7)$$

Из уравнения (3) определяется амплитуда абсолютного ускорения на резонансе

$$W_{k0} = \omega_{0k}^2 s_k (1 + \gamma_k^2) \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_k^2}} . \quad (4.8)$$

Резонансная частота виброзащитной системы с учетом демпфирования равна

$$f_{0k} = \frac{\omega_{0k}}{2\pi} \sqrt{1 + \gamma_k^2} . \quad (4.9)$$

Если агрегат установлен на n виброизолаторов, вместо C_k следует использовать суммарную жесткость виброзащитной системы в направлении k -ой оси $C_{\Sigma k} = \sum_{i=1}^n C_{ik}$, где

C_{ik} - жесткость i -того виброизолатора в направлении этой же оси.

Если пренебречь трением, коэффициент передачи вибрации на частоте ω_k равен

$$\eta_k = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}} \right)^2} \right| . \quad (4.10)$$

Видно, что ослабление вибрации ($\eta_k < 1$) происходит в случае $\omega_k > \omega_{k0}\sqrt{2}$ и будет тем больше, чем больше разница ω_k и ω_{k0} . Диапазон частот после $\omega_{k0}\sqrt{2}$ называется диапазоном вибрационной защиты. Однако чрезмерное уменьшение для его увеличения ω_{k0} (т.е. суммарной жесткости виброзащитной системы) недопустимо, так как мягкая виброзащитная система будет иметь амплитуду колебаний на резонансе, превышающую предельно допустимую. Чрезмерной будет и деформация системы под действием статической нагрузки q_{0k} . Поскольку $mg = C_{\Sigma k} q_{0k} = m\omega_{0k}^2 q_{0k}$, получаем $q_{0k} = g/\omega_{0k}^2$. Так, например, чтобы обеспечить собственную частоту объекта 10 Гц, необходимо разместить его на виброизолаторах такой жесткости, чтобы их статическое перемещение составляло 2,5 мм. При собственной частоте 5 Гц статическое перемещение виброизолаторов будет составлять 10 мм, а для собственной частоты объекта в 1 Гц необходимы виброизолаторы с перемещением 250 мм, что невозможно по соображениям как компоновки агрегатов, так и конструкции виброизолаторов.

Из анализа уравнения (4.6) для коэффициента передачи вибрации с учетом трения видно, что при слишком больших значениях γ ослабление виброизолатором вибрации в

диапазоне вибрационной защиты очень мало, и виброзащитная система неэффективна. Но при слишком малых значениях γ будет велика амплитуда колебаний виброзащитной системы на резонансе, и защищаемый агрегат может выйти из строя при прохождении резонанса.

Силы трения целесообразно учитывать, если выполняется условие

$$\gamma_k \geq 0,05 \quad . \quad (4.11)$$

Жесткость виброизолятора может быть так же, как и коэффициент рассеивания энергии, экспериментально определена по петле гистерезиса. Если максимальная и минимальная деформация виброизолятора в направлении k -ой оси $\delta_{k \max}$ и $\delta_{k \min}$, максимальная и минимальная реакция $P_{k \max}$ и $P_{k \min}$ соответственно (рис. 4.1), то

$$C_k = \frac{P_{k \max} - P_{k \min}}{\delta_{k \max} - \delta_{k \min}} \quad . \quad (4.12)$$

Поскольку жесткость и коэффициент рассеивания энергии виброизолятора зависят от формы петли гистерезиса, они в общем случае нелинейных характеристик виброизолятора зависят от амплитуды деформации виброизолятора и от деформации виброизолятора под действием статической нагрузки.

4.3. Оптимальное размещение виброизоляторов

При поступательном перемещении основания, возбуждающем колебания агрегата, агрегат может совершать также и вращательные колебания. Приближенную оценку наибольших амплитуд колебаний виброизолированного объекта в какой-либо i -ой точке можно производить по формулам:

$$\bar{a}_{xi} = |a_{0x}| + |\varphi_{0y} z_{0i}| + |\varphi_{0z} y_{oi}|; \quad (4.13)$$

$$\bar{a}_{yi} = |a_{0y}| + |\varphi_{0z} x_{0i}| + |\varphi_{0x} z_{oi}|; \quad (4.14)$$

$$\bar{a}_{zi} = |a_{0z}| + |\varphi_{0x} y_{0i}| + |\varphi_{0y} x_{oi}|; \quad (4.15)$$

где x_{0i} , y_{0i} , z_{0i} — координаты i -ой точки в системе осей X_0 , Y_0 , Z_0 с началом в центре тяжести установки, a_{0x} , a_{0y} , a_{0z} — амплитуды поступательного перемещения центра тяжести агрегата в направлении соответствующих осей, φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z} — амплитуды вращательных колебаний агрегата вокруг соответствующих осей. Видно, что в точках, удаленных от центра тяжести агрегата, амплитуды колебаний могут быть велики, что может повести к разрыву подведенных к агрегату трубопроводов и кабелей, удару агрегата о соседние конструкции. Ресурс виброизоляторов также снижается при больших амплитудах

деформации. Поэтому оптимальным является такое размещение виброизоляторов, при котором вращательные колебания отсутствуют.

Если агрегат, установленный на n виброизоляторов, совершает поступательные колебания в направлении оси Z с амплитудой a_{0z} , то в i -ом виброизоляторе возникает реакция $C_{zi} a_{0z}$, которые ведут к появлению момента вокруг оси X , равного $y_{vi} C_{zi} a_{0z}$, где y_{vi} – координата точки крепления i -ого виброизолятора (рис. 4.2).

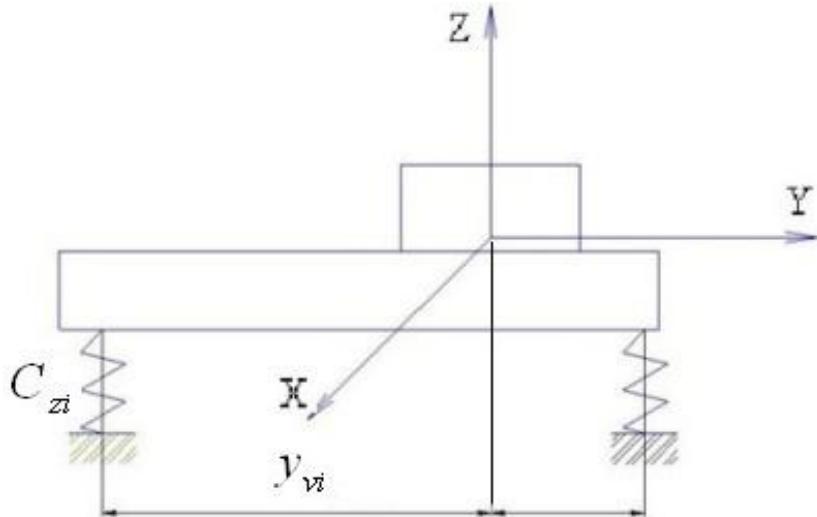


Рис. 4.2. Определение условий отсутствия вращательных колебаний

Для того, чтобы вращательные колебания вокруг оси X отсутствовали, сумма моментов должна быть равна нулю, то есть $\sum_{i=1}^n y_{vi} C_{zi} a_{0z} = 0$, или, сократив на одинаковый

сомножитель a_{0z} ,

$$\sum_{i=1}^n y_{vi} C_{zi} = 0. \quad (4.16)$$

Из условия равенства нулю моментов относительно оси Y получаем

$$\sum_{i=1}^n x_{vi} C_{zi} = 0. \quad (4.17)$$

Если рассмотреть поступательные колебания агрегата в направлении оси X , получим условие

$$\sum_{i=1}^n z_{vi} C_{xi} = 0. \quad (4.18)$$

Если рассмотреть поступательные колебания агрегата в направлении оси Y , получим условие

$$\sum_{i=1}^n z_{vi} C_{yi} = 0. \quad (4.19)$$

Условия (16) – (19) определяют оптимальное размещение виброизоляторов. Точка, относительно которой они выполняются, называется центром жесткости виброзащитной системы. Для отсутствия вращательных колебаний стремится совместить центр жесткости с центром масс агрегата, или хотя бы расположить центр жесткости и центр масс на одной прямой, вдоль которой действует возбуждающая вибрация.

Исходя из этого, можно рассмотреть различные схемы размещения виброизоляторов на защищаемом объекте (рис. 4.3).

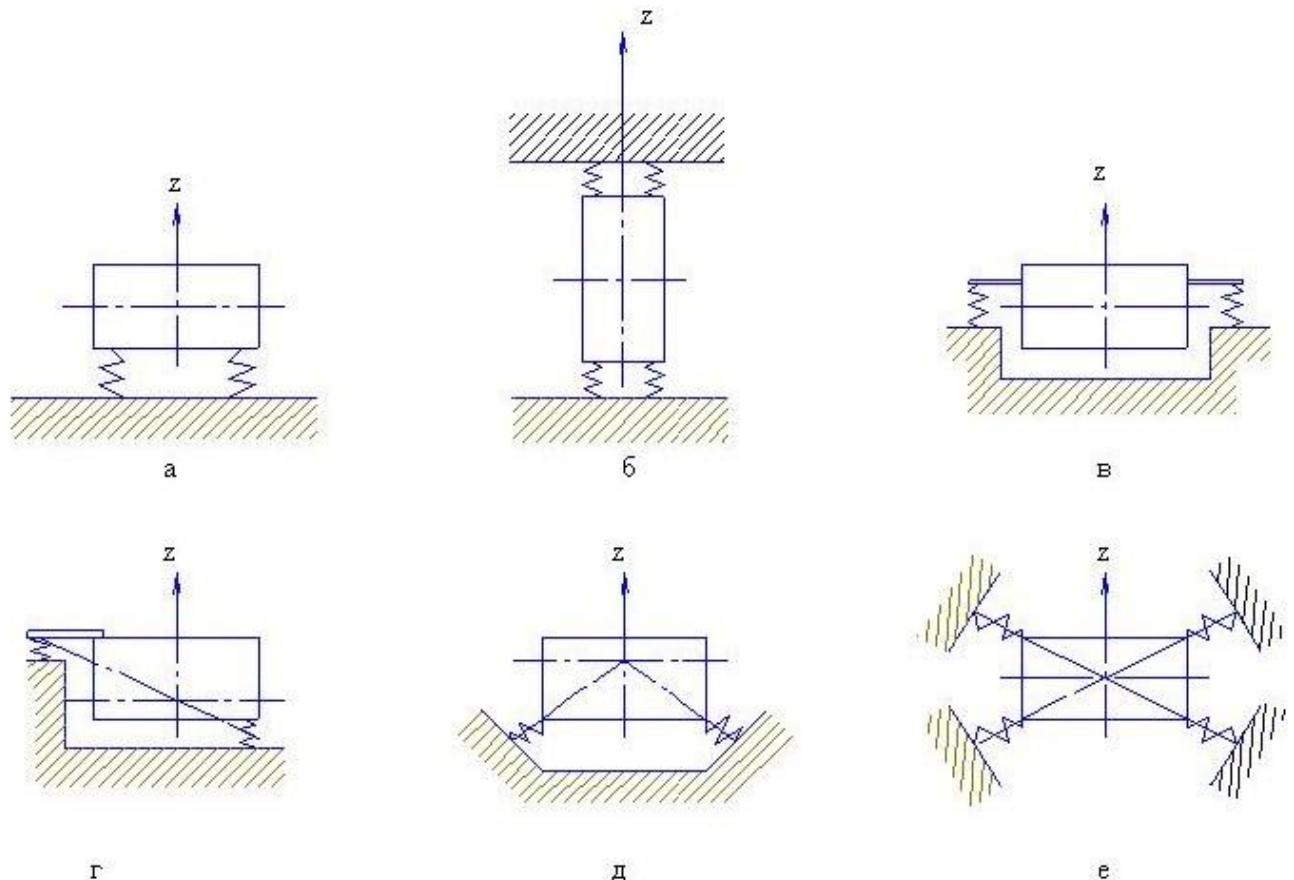


Рис. 4.3. Различные схемы размещения виброизоляторов

Схема (а) проста для монтажа, но неоптимальна при воздействии вибрации в боковом направлении. В схеме (б) центр масс совмещен с центром жесткости, но для этого требуется дополнительная плоскость размещения виброизоляторов, что увеличивает вес системы. Недостаток схемы (в) – увеличение габаритов виброзащитной системы в ширину. При размещении виброизоляторов по схеме (г) вращательные колебания будут отсутствовать, но агрегат будет иметь перекос в статическом состоянии. Схемы (д) и (е) очень хорошо уравновешены, но требуются специальные наклонные кронштейны для монтажа виброизоляторов.

Виброизоляторы, кроме того, следует располагать так, чтобы был удобен их монтаж и замена, а также была бы возможность наблюдения за их состоянием в процессе

эксплуатации. Для этого необходимо предусмотреть зазоры или проходы, обеспечивающие доступ ко всем виброизоляторам.

4.4. Конструкции виброизоляторов для агрегатов ГТД

Известно большое количество типов виброизоляторов, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками.

1. Стальные пружины. Обладают значительной прочностью, невысокой стоимостью, их характеристики линейны, что упрощает расчет виброзащитной системы. Однако они обладают слишком низким рассеиванием энергии колебаний – коэффициент передачи на резонансе достигает 100 и более, что может повести к разрушению оборудования при переходе через резонанс.

2. Эластомерные виброизоляторы. Стоимость их невысока, рассеивание энергии колебаний связано с внутренним трением в материале (резина, иные полимеры) и существенно больше, чем в пружинах (коэффициент передачи на резонансе около 10 или менее), вес существенно меньше, чем у стальных виброизоляторов. Но они обладают низкой способностью выдерживать воздействие окружающей среды (высокие и низкие температуры, масло, топливо, кислоты, вакуум, радиация, свет и т.д.), недостаточной прочностью.

3. Гидравлические и пневматические виброизоляторы и демпферы. Обладают высокой нагрузочной способностью (десятки и сотни тонн, например, амортизаторы, гасящие удар самолета при посадке). Рассеивание энергии колебаний связано в них с протеканием жидкости или газа через малые отверстия с высоким гидравлическим сопротивлением. Оно достаточно велико (коэффициент передачи на резонансе может быть не более 3). Однако конструкция таких виброизоляторов сложна, они часто нуждаются для своей работы в сложных системах, обеспечивающих давление жидкости или газа (насосы, фильтры и т.д.), а также чувствительны к засорению рабочих органов. Их характеристики зависят от частоты колебаний (для гидравлических виброизоляторов) или от квадрата частоты колебаний (для пневматических виброизоляторов), что затрудняет расчет виброзащитной системы.

4. Виброизоляторы сухого трения, как правило, цельнометаллические (пластинчатые, тросовые, из прессованной проволочной сетки, в частности, разработанного в КуАИ/СГАУ проволочного материала МР). Рассеивание энергии колебаний связано в них с внешним трением элементов конструкции друг о друга. Они обладают очень высоким рассеиванием энергии (коэффициент передачи на резонансе до

1,5), высокой прочностью и стойкостью к воздействию окружающей среды. Но технология изготовления этих виброизоляторов сложнее, что определяет их более высокую стоимость. Характеристики их нелинейны, что затрудняет расчет виброзащитной системы.

Исходя из вышеизложенного, для защиты неприводных агрегатов применяются, как правило, виброизоляторы сухого трения в зоне высоких температур и воздействия топлива и масла, и виброизоляторы на основе эластомеров там, где это позволяет температура и отсутствие агрессивной среды.

Виброизоляторы могут иметь различную форму упругодемпфирующих элементов. На рис. 4.4 приведены виброизоляторы с упругодемпфирующим элементом втулочного типа – бескорпусной (а) и корпусной (б). К втулочным виброизоляторам относятся, например, виброизоляторы из материала МР типа ВВ, ВП. На рис. 4.5 приведены виброизоляторы с упругодемпфирующим элементом кольцевого типа (АМГ, АК). На рис. 4.6 - виброизоляторы с упругодемпфирующим элементом колокольчикового типа (ДКА, ДКУ). В качестве упругодемпфирующего элемента может применяться трос (рис. 4.7).

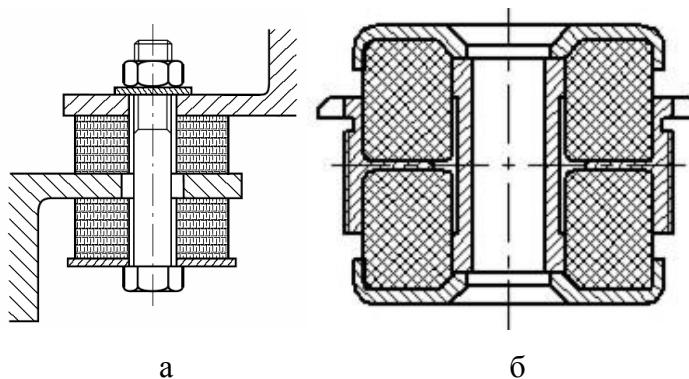


Рис. 4.4. Виброизоляторы втулочного типа: а – бескорпусной, б - корпусной

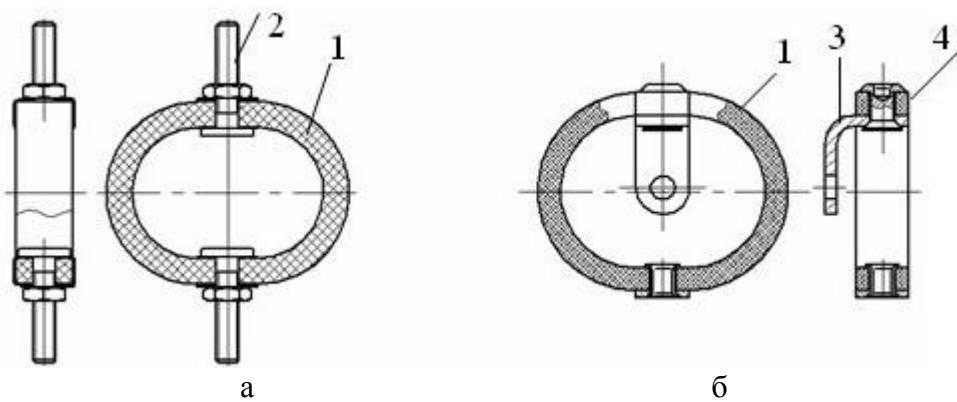


Рис. 4.5. Виброизоляторы втулочного типа: АМГ (а) и АК (б):
1 – упругодемпфирующий элемент, 2 – болт, 3 – кронштейн, 4 - заклепка

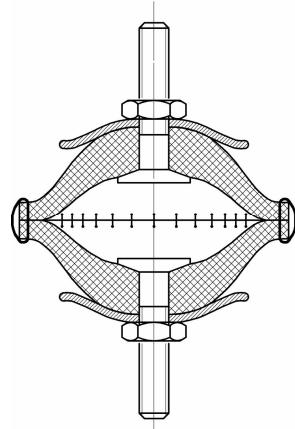


Рис. 4.6. Виброизолятор колокольчикового типа

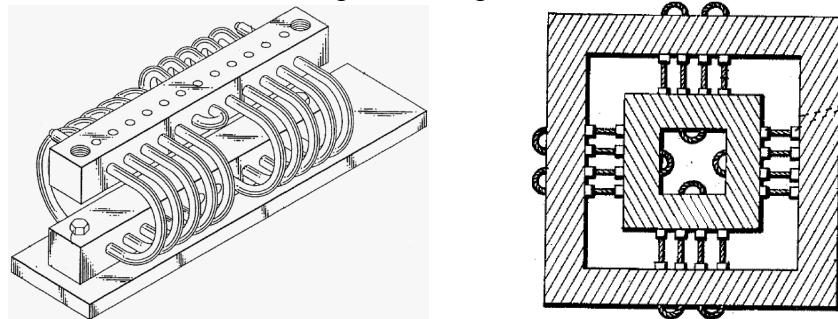


Рис. 4.7. Тросовые виброизоляторы

Виброизолятор может иметь упругодемпфирующий элемент из эластомера или прессованной проволоки, и одновременно пружину для дополнительной жесткости (рис. 4.8).

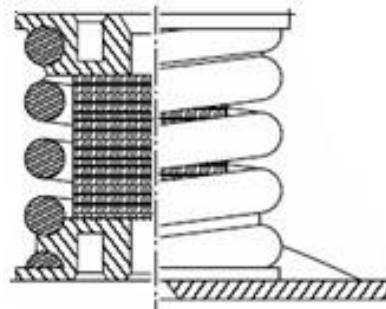


Рис. 4.8. Виброизолятор втулочного типа с пружиной

На рис. 4.9, 4.10, 4.11 приведены некоторые виброизоляторы с упругодемпфирующими элементами из резины (типов АКСС, АР, АРМ).

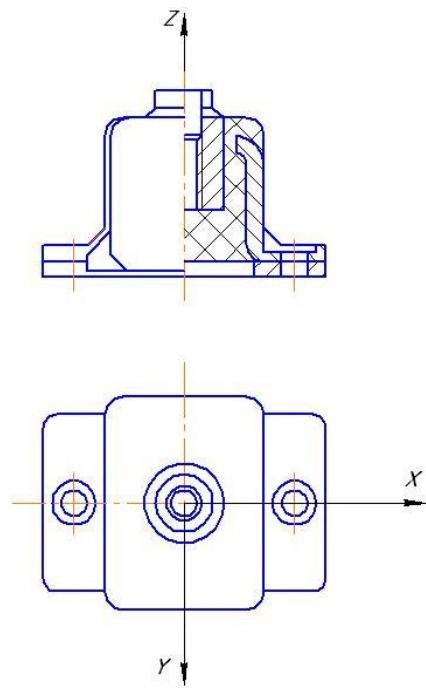


Рис. 4.9. Виброизолятор типа АКСС

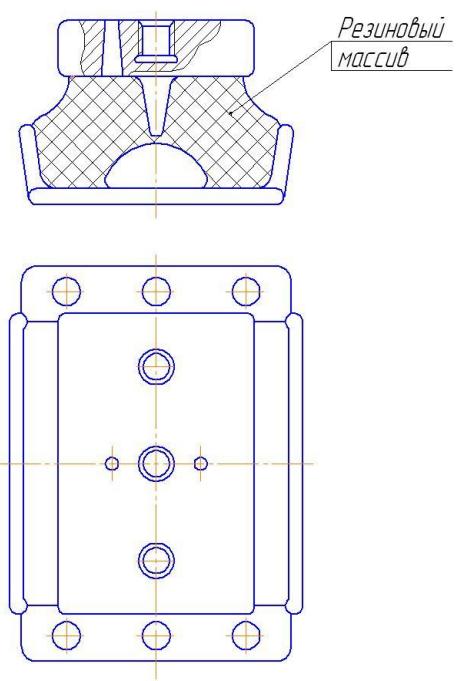


Рис. 4.10. Виброизолятор типа АР

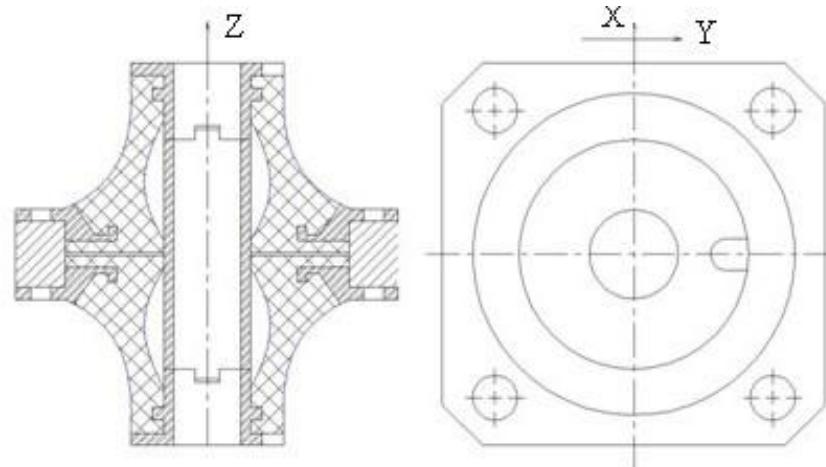


Рис. 4.11. Виброизолятор типа АРМ

4.5. Защита от случайной вибрации

Во многих случаях действующая на объект сила изменяется не по гармоническому закону, а случайно. Один из примеров этого – вибрация при транспортировке (неровности дороги расположены случайно и имеют случайную высоту). Другой пример – наложение очень большого количества возбуждающих колебания сил, каждая из которых изменяется по своему сложному закону.

Ускорение не может служить характеристикой случайной вибрации, так как его математическое ожидание для случайного процесса равно нулю (рис. 4.12).

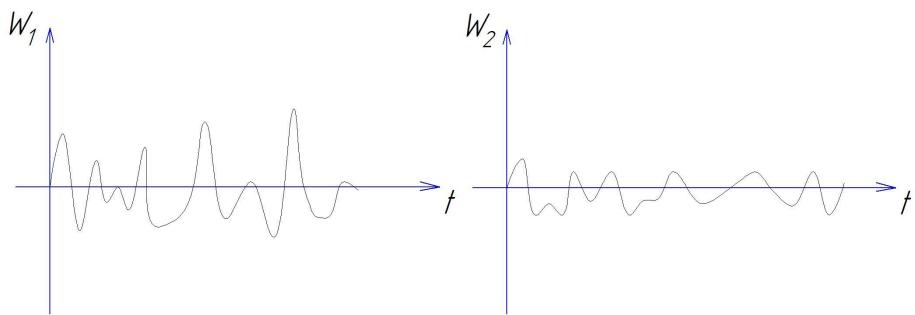


Рис. 12. Случайное воздействие с различной амплитудой

В качестве характеристики случайной вибрации применяется квадрат ускорения, отнесенный к ширине частотного диапазона, в котором задана случайная вибрация (рис. 13). Эта величина называется спектральной плотностью случайной вибрации W_ρ и

измеряется в величинах $\frac{(m/c^2)^2}{Гц}$.

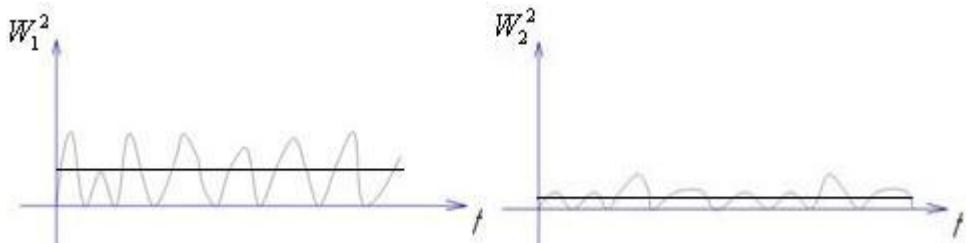


Рис. 13. Средние квадратичные значения случайного воздействия

Среднее значение ускорения, действующего на защищаемый объект,

$$W_R = \sqrt{D_A} \approx \pi \sqrt{\frac{W_\rho \omega_0}{\psi}} ,$$

среднее значение перемещения защищаемого объекта

$$X_R = \frac{W_R}{\omega_0^2} \approx \pi \sqrt{\frac{W_\rho}{\omega_0^3 \psi}} .$$

Максимальное перемещение с доверительной вероятностью 0,95 равно $X_{max} = 3X_R$, максимальное ускорение защищаемого объекта $W_{max} = 3W_R$. По найденному максимальному значению ускорения W_{max} определяется максимальная инерционная нагрузка на защищаемое оборудование, и сравнивается с допустимой. Значение максимального перемещения X_{max} позволяет оценить целостность подведенных к объекту трубопроводов и кабелей, отсутствие ударов защищаемого оборудования о соседние конструкции. По среднему значению ускорения оценивается комфортность подвески для человека.

5. СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ОТ УДАРА

Ударом в технике называют кинематическое или силовое возмущение относительно большой интенсивности и относительно малой продолжительности. При кинематическом возмущении удар определяется законом изменения ускорения основания w , на котором расположен защищаемый объект, от времени t .

Наибольшее значение имеют максимальное ускорение основания w_0 , время удара τ и полный импульс ударного воздействия на тело с массой m

$$S = m \int_0^\tau w(t) dt . \quad (5.1)$$

Для упрощения при расчетах форму ударного импульса рассматривают как прямоугольную, треугольную, полусинусоидальную, пилообразную и т.д. (рис.5.1).

В некоторых случаях рассматривают длительность удара на уровне w_d , понимая под этим промежуток времени длительностью τ_d , при котором $w(t) > w_d$.

Расчетная модель системы защиты от удара с одной степенью свободы состоит из тела, движущегося вдоль оси X , виброизолятора, создающего силу $R(x, \dot{x})$, и основания. При силовом возмущении внешняя сила $F(t)$ приложена к телу в направлении оси X , основание при этом считается неподвижным и является объектом защиты.

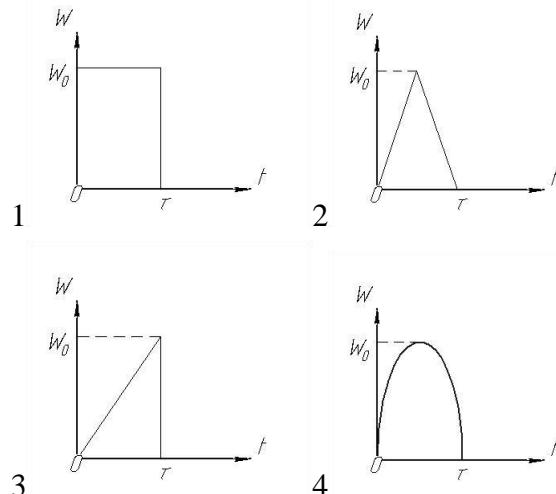


Рис.5.1. Формы ударного импульса. 1 – прямоугольная, 2 – треугольная, 3 – пилообразная, 4 – полусинусоидальная

Уравнение движения тела при этом имеет вид

$$\ddot{x} + r(x', \dot{x}') = w(t) , \quad (5.2)$$

где $w(t) = F(t)/m$, $r(x', \dot{x}') = R(x', \dot{x}')/m$, x' – абсолютная координата тела.

При кинематическом возмущении основание движется по закону $u(t)$, объектом защиты от удара является тело, которое подвергается воздействию со стороны виброизолятора, создающего силу $R(x, \dot{x})$, где $x = x' - u$ – относительная координата тела. Уравнение движения тела при этом имеет вид

$$\ddot{x} + r(x, \dot{x}) = w(t) , \quad (5.3)$$

где $w(t) = -\ddot{u}(t)$. Уравнения (5.2) и (5.3) совпадают с точностью до обозначений, поэтому расчет силового и кинематического ударного возбуждения одинаков.

Рассмотрим вначале простейшую линейную модель системы защиты от удара с виброизолатором с постоянной жесткостью k (рис.2). Поскольку длительность удара мала, предположим, что его энергия почти не успевает рассеяться в виброизолаторе, и демпфированием можно пренебречь. В таком случае уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = w(t), \quad (5.4)$$

где $\omega_0^2 = k/m$ – собственная частота системы.

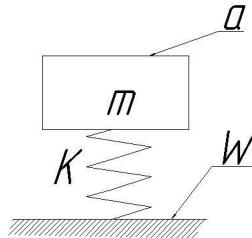


Рис.5.2. Линейная модель системы защиты от удара.

Движение такой системы после воздействия мгновенного импульса S_0 в момент θ происходит согласно уравнению

$$x = x(\theta) \cos \omega_0(t - \theta) + \frac{\dot{x}(\theta)}{\omega_0} \sin \omega_0(t - \theta).$$

При начальных условиях $x(\theta) = 0$, $\dot{x}(\theta) = \frac{S_0}{m}$, это уравнение принимает вид

$x = \frac{S_0}{\omega_0 m} \sin \omega_0(t - \theta)$. Рассматривая действие на систему как серию импульсов $m w(\theta) d\theta$, приходим к интегралу

$$x = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t w(\theta) \sin \omega_0(t - \theta) d\theta \quad (5.5a)$$

при $0 < t \leq \tau$ или

$$x = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\tau w(\theta) \sin \omega_0(t - \theta) d\theta \quad (5.5b)$$

при $\tau < t$ (в этом случае действие удара уже прекратилось и система совершает свободные колебания).

Из (5.4) абсолютное ускорение защищаемого объекта

$$a(t) = \omega_0^2 x(t) \quad (5.6)$$

Поскольку основная цель расчета на удар состоит в определении максимальных абсолютного ускорения и относительного перемещения защищаемого объекта, соотношения (5.5) и (5.6) удобно представить в виде:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} Q(t) \sin(\omega_0 t - \Psi(t)), \quad (5.7)$$

$$a(t) = \omega_0 Q(t) \sin(\omega_0 t - \Psi(t)), \quad (5.8)$$

где $Q(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}$, $\Psi(t) = \arctg \frac{B(t)}{A(t)}$,

$$A(t) = \int_0^t w(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta, \quad B(t) = \int_0^t w(\theta) \sin \omega_0 \theta d\theta.$$

При $\tau < t$

$$A(t) = A(\tau), \quad B(t) = B(\tau), \quad Q(t) = Q(\tau), \quad \Psi(t) = \Psi(\tau).$$

В соответствии с (5.7) и (5.8), процессы $x(t)$ и $a(t)$ можно рассматривать как модулированные по амплитуде колебания с частотой ω_0 , причем функции $\frac{1}{\omega_0}Q(t)$ и

$\omega_0 Q(t)$ можно рассматривать как огибающие. Наибольшие значения перемещения и ускорения не могут быть больше их.

Зависимости ускорений основания и защищаемого объекта от времени показаны на рис. 3. Пусть в момент t_0 отклонение объекта наибольшее. Если $\tau < t_0$, удар называется **коротким**, в противном случае – **длинным**.

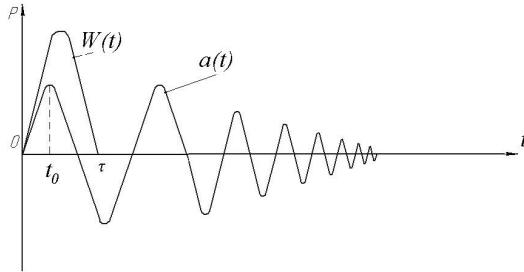


Рис.5.3. Зависимости ускорений основания и защищаемого объекта от времени

Для простейшего случая удара с постоянным ускорением w_0 (ударный импульс прямоугольной формы) получаем решение:

$$x = \frac{2w_0}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \sin \omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right). \quad (5.9)$$

Наибольшее значение перемещения объекта в этом случае

$$x_{\max} = \frac{2w_0}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2}, \quad (5.10)$$

ускорение защищаемого объекта равно

$$a_{\max} = 2w_0 \sin \frac{\omega_0 \tau}{2}. \quad (5.11)$$

Видно, что эффективность защиты от удара зависит от значения безразмерного параметра $\omega_0 \tau$ (или $\frac{\tau}{T}$, где T – период собственных колебаний системы). Коэффициент передачи удара

$$\eta = \frac{a_{\max}}{w_0} = 2 \sin \frac{\omega_0 \tau}{2}. \quad (5.12)$$

Защита от удара ($\eta < 1$) обеспечивается при $\omega_0\tau < \frac{\pi}{3}$.

Приведем решения для некоторых других простейших форм ударного импульса:
Полусинусоидальная форма:

$$a_{\max} = 2w_0 \frac{\frac{\pi}{\omega_0\tau}}{\frac{\pi^2}{\omega_0^2\tau^2} - 1} \sin \frac{\omega_0\tau}{2} \quad \text{при } \tau < t_0 ; \quad (5.13a)$$

$$a_{\max} = \frac{w_0}{1 - \frac{\pi^2}{\omega_0^2\tau^2}} (\sin \frac{\pi t_0}{\tau} - \frac{\pi}{\omega_0\tau} \sin \omega_0 t_0) \quad \text{при } t_0 < \tau \quad (5.13b)$$

Треугольная форма:

$$a_{\max} = 2w_0 \frac{\frac{\sin^2 \frac{\omega_0\tau}{4}}{\omega_0\tau}}{\frac{4}{\omega_0\tau}} \quad \text{при } \tau < t_0 ; \quad (5.14a)$$

$$a_{\max} = 2w_0 \left(1 - \frac{t_0}{\tau} - \frac{\sin \omega_0 t_0}{\omega_0 t_0} - \frac{2 \sin \omega_0 (t_0 - \frac{\tau}{2})}{\omega_0 \tau} \right)$$

при $\frac{\tau}{2} \leq t_0 \leq \tau$; (5.14b)

$$a_{\max} = 2w_0 \left(\frac{t_0}{\tau} - \frac{\ln \omega_0 t_0}{\omega_0 \tau} \right) \quad \text{при } 0 \leq t_0 \leq \frac{\tau}{2} . \quad (5.14c)$$

Уменьшение параметра $\omega_0\tau$ необходимо и в этих случаях. В частности, из (5.13a) можно получить, что для защиты от короткого удара полусинусоидальной формы требуется

$$\omega_0\tau < \frac{2\pi}{1 + \sqrt{7}} \approx 1.73 .$$

Наибольшее возможное значение коэффициента передачи удара $\eta_{\max} = 2$ для линейной системы при ударе прямоугольной формы можно получить из (5.11). Поскольку прямоугольная форма удара имеет наибольшее значение импульса S , для всех других форм удара наибольшее возможное значение коэффициента передачи удара η меньше. Так, для пилообразной формы $\eta \leq 1.25$, для полусинусоидальной формы $\eta \leq 1.78$.

Рассеивание энергии несколько уменьшает значение a_{\max} . Коэффициент передачи удара с учетом демпфирования можно оценить:

$$\eta' \approx \eta \left(1 - \frac{\psi}{8} \right) , \quad (5.15)$$

где ψ – коэффициент рассеивания энергии.

Ударным спектром системы называют зависимость коэффициента передачи удара от отношения длительности удара к периоду собственных колебаний системы (или, что то же самое, от произведения длительности удара на собственную частоту системы).

На рис. 5.4 приведен ударный спектр линейной демпфированной системы при ударе полусинусоидальной формы. Он получен при помощи уравнений (5.13) с учетом (5.15).

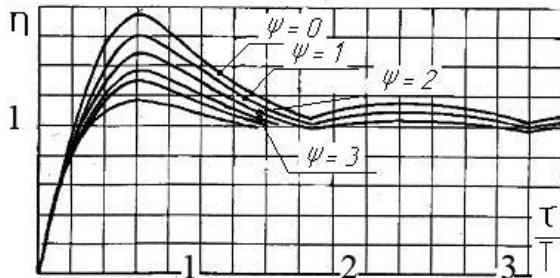


Рис.5.4. Ударный спектр линейной демпфированной системы защиты от удара при ударе полусинусоидальной формы

Нагрузочные характеристики $P(x)$ (где P – сила, x – перемещение) виброизоляторов, применяемых в системах защиты от удара (в частности, из материала МР), часто существенно нелинейны. Различают **жесткую** нелинейную характеристику, в которой сила увеличивается больше, чем в линейной, и **мягкую** нелинейную характеристику, в которой сила увеличивается меньше, чем в линейной (рис.5.5).

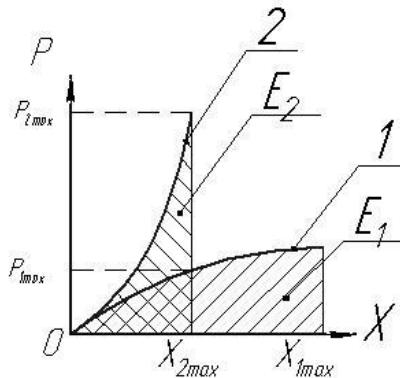


Рис.5.5. Мягкая (1) и жесткая (2) нелинейные характеристики виброизолятора

Допуская, что время удара мало, и пренебрегая демпфированием, получаем, что скорость объекта после удара равна

$$V = \int_0^\tau w(t) dt . \quad (5.16)$$

Кинетическая энергия, вносимая ударом в систему

$$K = \frac{mV^2}{2} . \quad (5.17)$$

Эта энергия равна потенциальной энергии деформирования виброизолятора $E = \int_0^{x_{\max}} P(x) dx$. Если максимальные деформации виброизоляторов с мягкой и жесткой

характеристикой равны $x_{1\max}$ и $x_{2\max}$, а максимальные их реакции, соответственно, $P_{1\max}$ и $P_{2\max}$ (см. рис.5.5), то площади E_1 и E_2 должны быть одинаковы и равны K .

Метод расчета воздействия удара на систему с нелинейными виброизоляторами ясен из рис.5. По уравнениям (5.16) и (5.17) рассчитывается значение энергии удара. Далее с последовательным увеличением x численно интегрируется площадь под нагрузочной характеристикой виброизолятора. Равенство интеграла значению K означает, что получены значения x_{\max} и P_{\max} . Наибольшее ускорение защищаемого объекта

$$a_{\max} = \frac{P_{\max}}{m}.$$

Характеристика виброизолятора может быть несимметричной (как, например, у виброизоляторов из МР типов ДК, ДКУ, АК, АМГ) (см. рис.4.5, 4.6). В таком случае необходимо интегрировать как участок сжатия, так и участок растяжения виброизолятора. Возможно, что значения x_{\max} и P_{\max} будут достигнуты порознь при деформации виброизолятора в разных направлениях.

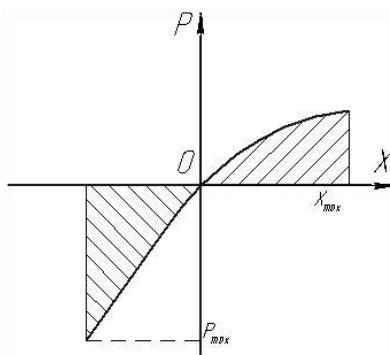


Рис.5.6. Несимметричная характеристика системы защиты от удара

Упругие опоры объекта, как правило, используются для защиты не только от удара, но и от вибрации. Поскольку перемещения при вибрации значительно меньше, чем при ударе, жесткость системы в диапазоне малых деформаций $\pm \Delta$ может быть выбрана оптимальной для защиты от вибрации и равной k_v , а в диапазоне больших деформаций – оптимальной для защиты от удара (рис.5.7).

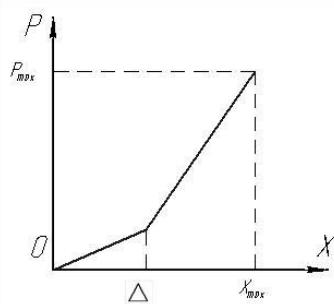


Рис.5.7. Билинейная характеристика системы защиты от удара

Уравнение для такой билинейной системы может быть получено для прямоугольного удара из условия равенства энергии удара K площади под нагрузочной характеристикой системы.

$$a_{\max} = \frac{V^2 - \omega_0^2 \Delta^2}{x_{\max} - \Delta} - \omega_0^2 \Delta .$$

После расчета необходимо оценить период собственных колебаний системы $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{x_{\max}m}{P_{\max}}}$. Поскольку момент достижения максимальных ускорения и перемещения $t_0 = \frac{T}{4}$, если $\frac{T}{4} < \tau$, удар является длинным, допущение о малости времени его действия не выполняется и вышеизложенный расчет некорректен.

Если удар является длинным, рассматривать его как мгновенный импульс, вносящий энергию в систему, нельзя. Более корректным будет замена $w(t)$ импульсом прямоугольной формы той же площади, той же длительности τ и интенсивности w_s .

$$w_s = \frac{\int_0^\tau w(t)dt}{\tau}$$

Под действием квазипостоянного ускорения w_s система получает квазистатическое перемещение x_s , рассчитываемое при помощи нагрузочной характеристики:

$$mw_s = P(x_s)$$

Относительно нового положения равновесия $(x_s; mw_s)$ система совершает свободные колебания (рис. 5.8, а, б). Их энергия равна

$$E = \int_0^{x_s} (mw_s - P(x))dx$$

Пренебрегая рассеиванием энергии, получаем, что такова же энергия системы при колебании в противоположную сторону

$$E = \int_{x_s}^{x_{\max}} (P(x) - mw_s)dx$$

Это уравнение решается численным интегрированием для определения x_{\max} и P_{\max} .

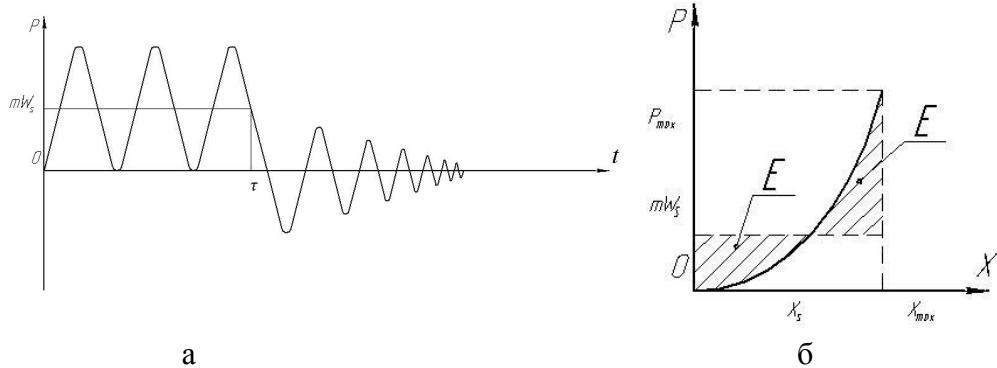


Рис.5.8. Воздействие длинного удара на нелинейную систему:
а – в координатах $(t; P)$, б – в координатах $(x; P)$

Учебное издание

Уланов Александр Михайлович

**ВИБРАЦИЯ И ПРОЧНОСТЬ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ
И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

Учебное пособие

Редактор
Доверстка

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. .

Тираж экз. Заказ . Арт. С - /2011

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.